ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №9

ШЕКСІЗ АЗ ЖӘНЕ ШЕКСІЗ ҮЛКЕН ШАМАЛАР (ШАШ ЖӘНЕ ШҮШ). НЕГІЗГІ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР. ТАМАША ШЕКТЕР. ШЕКСІЗ АЗ (ҮЛКЕН) ШАМАЛАРДЫ САЛЫСТЫРУ. ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ. ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІС НҮКТЕЛЕРІ. АРАЛЫҚТА ҮЗІЛІССІЗ ФУНКЦИЯЛАР.

Функция шектерін табудың келесі әдістерін қарастырамыз.

Бірінші және екінші тамаша шектер және олардың салдарлары көмегімен шекті есептеу әдісі.

$\frac{0}{0}$ және $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуда қолданылатын бірнеше белгілі шектерді келтіреміз.

Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (мұнда $a=\infty$ жағдайы да мүмкін) болса, онда:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ – *бірінші тамаша шек;*
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$
5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1;$
6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a;$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=1;$
8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=\log_a e;$
9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{[1+\alpha(x)]^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu;$

10. $\lim\limits_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}=e$ – *екінші тамаша шек.*

1 – 9 шектері $\frac{0}{0}$ түріндегі, 10 шегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты ашуда қолданылады.

2 – 4 шектері бірінші тамаша шектің, 5 – 9 шектері екінші тамаша шектің салдары болады.

Мысал 1: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg} x}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ – бірінші тамаша шекті және $\lim\limits_{x\to a}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ түріндегі оның салдарын қолданамыз:

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg} x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\cdot\frac{tgx}{x}\cdot x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=2.$

c) Жауабы: 2.

Мысал 2: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{9}}{e^{-3x}-1}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ – бірінші тамаша шектің және $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1$ екінші тамаша шектің салдарларын қолданамыз:

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{9}}{e^{-3x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{9}\cdot\frac{\arcsin\frac{x}{9}}{\frac{x}{9}}}{-3x\cdot\frac{e^{-3x}-1}{-3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{9}}{-3x}=-\frac{1}{27}.$$

c) Жауабы: $-\frac{1}{27}$.

Шексіз аз функцияларды (ШАФ) немесе шексіз үлкен функцияларды (ШҮФ) салыстырудағы эквиваленттілікті қолданып шекті есептеу әдісі.

$x\to a\Rightarrow \alpha(x),\beta(x)-$ *ШАФ* және $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$ болсын.

Егер $C=1$ болса, онда α және β – *эквивалентті шексіз аз функциялар* деп аталады. Эквиваленттілік $\alpha\sim\beta$ түрінде белгіленеді. $x\to 0$ жағдайында:

1. $\sin x\sim x;$ **6.** $a^x-1\sim x\cdot\ln a;$

2. $tgx\sim x;$ **7.** $e^x-1\sim x;$

3. $\arcsin x\sim x;$ **8.** $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e;$

4. $arctgx\sim x;$ **9.** $\ln(1+x)\sim x;$

5. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};$ **10.** $(1+x)^k-1\sim k\cdot x,\quad k>0.$

Ескерту: Шекті есептеу кезінде шексіз азфункцияны оған эквивалентті функциямен ауыстыруғаннан шектің мәні өзгермейді. Шексіз үлкен функциялар осыған ұқсас салыстырылады.

Мысал 3: Шекті табыңыз: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot\operatorname{tg} x}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $x \to 0$ жағдайында $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ және $tgx \sim x$ эквиваленттіліктерін қолданып шекті есептейміз:

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4x^2}{2}}{x \cdot x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 2.$

c) Жауабы: 2.

Мысал 4: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{9}}{e^{-3x}-1}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $x \to 0$ жағдайында $\arcsin x \sim x$ және $e^x - 1 \sim x$ эквиваленттіліктерін қолданып шекті есептейміз:

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{9}}{e^{-3x}-1} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{9}}{-3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}.$

c) Жауабы: $-\frac{1}{27}$.

Мысал 5: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x+2}\right)^{3x+5}$.

Шешімі:

a) 1^∞ анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ – екінші тамаша шекті қолданамыз:

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x+2}\right)^{3x+5} = 1^\infty = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{5}}\right)^{\frac{x+2}{5}}\right)^{\frac{5}{x+2}(3x+5)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{15x+25}{x+2}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15+\frac{25}{x}}{1+\frac{2}{x}}} = e^{15}.$$

c) Жауабы: e^{15}.

Мысал 6: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$.

Шешімі:

a) 1^{∞} анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – екінші тамаша шекті қолданамыз:

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1+(-4x))^{\frac{1}{-4x}}\right)^{\frac{-4x}{x}} = e^{-4}.$

c) Жауабы: e^{-4}.