ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №8

КОМПЛЕКС САНДАР ҰҒЫМЫНЫҢ ЕНГІЗІЛУІ. КОМПЛЕКС САН ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖИЫНЫ. КОМПЛЕКС САНДАРДЫҢ АЙЫРМАСЫ МЕН ҚАТЫНАСЫ. КОМПЛЕКС САННЫҢ АЛГЕБРАЛЫҚ ПІШІНІ (ТҮРІ). ТҮЙІНДЕС КОМПЛЕКС САН. КОМПЛЕКС САННЫҢ МОДУЛІ. КОМПЛЕКС САННЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ КЕСКІНІ ЖӘНЕ АРГУМЕНТІ. КОМПЛЕКС САННЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ КӨРСЕТКІШТІК ПІШІНДЕРІ. КОМПЛЕКС САНДЫ ДӘРЕЖЕГЕ ШЫҒАРУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮБІРІ.

Тапсырма №1

«Комплекс сандар» тақырыптарының теориялық сұрақтарына жауап іздеу, білімді шыңдау.

1. Қандай амалдар енгізілген $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R^2\}$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ жиынын комплекс сандар жиыны деп атап, C әрпімен белгілейміз?

A) қосу және көбейту
B) қосу және азайту
C) қосу және бөлу
D) азайту және көбейту
E) бөлу және көбейту

2. Комплекс сандар қанағаттандырмайтын аксиоманы көрсетіңіз.

A) қосудың, көбейтудің коммутативтілігі
B) нөлдік элементтің болмауы
C) қосудың, көбейтудің терімділігі
D) қарама-қарсы санның бар болуы
E) бірлік элементтің бар болуы

3. $z_1 = (x_1, y_1)$ санының $z_2 = (x_2, y_2) \neq (0,0)$ санына қатынасын есептейтін формуланы көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2-y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2-y_2^2}\right), x_2^2-y_2^2\neq 0$

B) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1+x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), x_2^2+y_2^2\neq 0$

C) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), x_2^2+y_2^2\neq 0$

D) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), x_2^2+y_2^2\neq 0$

E) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2-y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2-y_2^2}\right), x_2^2-y_2^2\neq 0$

4. $z_1=(x_1,y_1)$ және $z_2=(x_2,y_2)$ сандарының көбейтіндісін есептейтін формуланы көрсетіңіз.

A) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2+y_1y_2,\ x_1y_2-x_2y_1)$

B) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2+y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

C) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2-x_2y_1)$

D) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

E) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1y_2-x_2y_1,\ x_1x_2+y_1y_2)$

5. $z,w\in C$ болса, түйіндестіктің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\overline{(\overline{z})}=z$

B) $\Re(z)=\frac{z-\overline{z}}{2};\ \Im(z)=\frac{z+\overline{z}}{2i}$

C) $\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}$

D) $z\neq 0\Rightarrow\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}}$

E) $\Re(z+w)=\Re(z)+\Re(w);\quad \Im(z+w)=\Im(z)+\Im(w)$

6. $z=(x,y)$ және $\bar{z}=(x,-y)$ түйіндес сандары комплекс сандар жазықтығында қалай орналасады?

A) Oy өсіне қатысты симметриялы орналасады

B) бас нүктеге қатысты симметриялы орналасады

C) Ox өсіне қатысты симметриялы орналасады

D) Ox өсінің бойында орналасады

E) Oy өсінің бойында орналасады

7. Өзара түйіндес $z=x+i\,y,\ z=x-i\,y$ комплекс сандары үшін қандай теңдіктер орынды болады?

A) $|\bar{z}|=\sqrt{2x^2+(-y)^2}=|z|$ және $z\cdot\bar{z}=(2x+i\,y)\cdot(x-i\,y)=2x^2+y^2=2|z|^2=|\bar{z}|^2$

B) $|\bar{z}|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=|z|$ және $z\cdot\bar{z}=(x+i\,y)\cdot(x-i\,y)=x^2+y^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$

C) $|\bar{z}|=\sqrt{x^2-(-y)^2}=|z|$ және $z\cdot\bar{z}=(x-i\,y)\cdot(x-i\,y)=x^2-y^2=\dfrac{|z|^2}{2}=\dfrac{|\bar{z}|^2}{2}$

D) $|\bar{z}|=\sqrt{x^2+2(-y)^2}=|z|$ және $z\cdot\bar{z}=(x+i\,y)\cdot(x-2i\,y)=x^2+2y^2=|z|^2=2|\bar{z}|^2$

E) $|\bar{z}|=2\sqrt{x^2+(-y)^2}=|z|$ және $z\cdot\bar{z}=2(x+i\,y)\cdot(x-i\,y)=x^2+y^2=2|z|^2=2|\bar{z}|^2$

8. $z=(x,y)=x+iy$ комплекс санының модулін қалай анықтаймыз?

A) $|z|=r=\sqrt{x+y}$

B) $|z|=r=\sqrt{x^2-y^2}$

C) $|z|=r=\sqrt{x^2+2y^2}$

D) $|z|=r=\sqrt{2x^2+y^2}$

E) $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$

9. Oxy комплекстік жазықтығындағы z санын кескіндейтін z векторының ұзындығының атауын көрсетіңіз.

A) z санының модулі
B) z санының аргументі
C) z санының түбірі
D) z санының аргументінің бас мәні
E) z санының векторлық кескіні

10. $z, w \in C$ болса, онда модульдің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\big|\,|z|-|w|\,\big| \le |z-w|$
B) $|z+w| \ge |z|+|w|$
C) $|zw| = |z||w|$
D) $|z^n| = |z|^n$
E) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

11. $U = \{z \in C \,||z| = 1\}$ - модулі бірге тең комплекс сандардың жиыны болса, онда қай тұжырым орындалмайды?

A) $1 \in \mathrm{U}$
B) $\mathrm{z}, \mathrm{z}' \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{z}\mathrm{z}' \in \mathrm{U}$
C) $\mathrm{z}, \mathrm{z}' \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{z} \pm \mathrm{z}' \in \mathrm{U}$
D) $\mathrm{z} \in \mathrm{U} \Rightarrow \bar{\mathrm{z}} \in \mathrm{U}$
E) $\mathrm{z} \in \mathrm{U} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{z}} = \bar{\mathrm{z}} \in \mathrm{U}$

12. Ox өсін z санын кескіндейтін z векторының бағытымен беттестіру үшін бұратын бұрыштың атауын көрсетіңіз.

A) z санының модулі
B) z санының түбірі
C) z санының аргументінің бас мәні
D) z санының аргументі

E) Z санының векторлық кескіні

13. Комплекс саны аргументінің бас мәнінің өзгеру аралығын көрсетіңіз.

A) $[-\pi;\pi]$

B) $[0;2\pi]$

C) $(0;2\pi]$

D) $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

E) $(-\pi;\pi]$

14. Z комплекс санының аргументінің кез келген мәнін анықтайтын формуланы көрсетіңіз.

A) $Argz = \arg z - 2k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

B) $Argz = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

C) $Argz = \arg z \pm 2k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

D) $Argz = \arg z + k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

E) $Argz = \arg z + 2k, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

15. Екі комплекс санның көбейтіндісінің аргументі неге тең?

A) $Argz_1 \cdot Argz_2$

B) $Argz_1 + Argz_2$

C) $Argz_1 - Argz_2$

D) $Arg(z_1 + z_2)$

E) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

16. Екі комплекс санның қатынасының аргументі неге тең?

A) $\frac{Argz_1}{Argz_2}$

B) $Argz_1 + Argz_2$

C) $Argz_1 - Argz_2$

D) $Arg(z_1 - z_2)$

E) $Arg(z_1 \cdot z_2)$

17. $\overline{z}$ комплекс санының аргументін көрсетіңіз.

A) $Arg(-z)$

B) $-Argz + \pi$

C) $-Argz - \pi$

D) $-Argz$

E) $Argz + \pi k$

18. $z, w \in C$ болса, түйіндестіктің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\overline{(\overline{z})} = -z$

B) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

C) $z\overline{z} = |z|^2$

D) $z \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$

E) $z \in R \Leftrightarrow \overline{z} = z;\ z \in iR \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

19. Эйлер формулаларын көрсетіңіз.

A) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

B) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

C) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

D) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

E) $z = |z|e^{i\theta}$

20. Де Муаврдың формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

B) $(\cos\theta + i\sin\ \theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

C) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

D) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

E) $z = |z|e^{i\theta}$

21. Комплекс санға тән емес қасиетті көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

B) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

C) $z_1 \pm z_2 = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1} \pm \rho_2 e^{i\theta_2}}{2}$

D) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin\ y)$

E) $e^{(\theta+2k\pi)i} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, k \in Z$

22. $e^{i\varphi}$ көрсеткіштік функциясының Эйлер формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\varphi - \sin\varphi$

B) $\cos\varphi - i\sin\varphi$

C) $\cos\varphi + \sin\varphi$

D) $\cos\varphi + i\sin\varphi$

E) $i\sin\varphi$

23. $e^{-i\varphi}$ көрсеткіштік функциясының Эйлер формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\varphi + i\sin\varphi$

B) $\cos\varphi + \sin\varphi$

C) $\cos\varphi - \sin\varphi$

D) $i\sin\varphi$

E) $\cos\varphi - i\sin\varphi$

24. Екі комплекс санның көбейтіндісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

B) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 \cdot \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 \cdot \varphi_2))$

C) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| + |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 \cdot \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

D) $z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

E) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

25. Екі комплекс санның қатынасының формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2} = |z_1 - z_2|(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

B) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

C) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)$

D) $\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

E) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

26. z_1, z_2 нүктелерінің арақашықтығы неге тең?

A) $\mathbf{z}_2 / \mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

B) $\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

C) $\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

D) $\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

E) $\mathbf{z}_1 / \mathbf{z}_2$ векторының ұзындығына

27. $|z - z_0| < r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

28. $|z - z_0| > r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

29. $|z - z_0| = r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

30. $r_1 \le |z - z_0| \le r_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңберлерді қоса есептегендегі сақинаны құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

31. $\mathbf{z}_1$ векторын $\arg z_2$ бұрышына бұру және $|z_2|$ «есе ұзарту» арқылы алынатын қандай вектор?

A) $z_2 \cdot z_1$ көбейтіндісінің векторы

B) $\frac{z_2}{z_1}$ қатынасының векторы

C) $z_2 + z_1$ қосындысының векторы

D) $z_2 - z_1$ айырмасының векторы

E) $\frac{z_1}{z_2}$ қатынасының векторы

32. Бөлінгіштің векторын «ұзарту» мен бұру арқылы алынатын қандай вектор?

A) $\frac{z_1}{z_2}$ қатынасының векторы

B) $z_2 \cdot z_1$ көбейтіндісінің векторы

C) $\frac{z_2 + z_1}{2}$ қосындысының жарты векторы

D) $z_2 + z_1$ қосындысының векторы

E) $z_2 - z_1$ айырмасының векторы

33. Егер ... болса, онда z_1 санын z_2 санына көбейту z_1 векторын тек бұруға әкеледі.

A) $|z_2| = 1$

B) $|z_2| = 0$

C) $|z_2| = 3$

D) $|z_2| = 5$

E) $|z_2| = 4$

34. Егер ... болса, онда z_1 санын z_2 санына көбейту z_1 векторын тек «ұзартуға» әкеледі.

A) $\arg z_2 = 0$

B) $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$

C) $\arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$

D) $\arg z_2 = \pi$

E) $\arg z_2 = -\pi$

35. Екі комплекс санның көбейтіндісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

B) $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

C) $z_1 z_2 = (|z_1| + |z_2|) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

D) $z_1 z_2 = (|z_1| - |z_2|) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

E) $z_1 z_2 = (|z_1| + |z_2|) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

36. Екі комплекс санның қатынасының формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

B) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

C) $\frac{z_1}{z_2} = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

D) $\frac{z_1}{z_2} = (|z_1| + |z_2|) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

E) $\frac{z_1}{z_2} = (|z_1| - |z_2|) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

37. $\sqrt[n]{z}$ түбірініңбарлықмәндерінтабуформуласынкөрсетіңіз.

A) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k = 0,1,2,\ldots,n-1$

B) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k = 0,1,2,\ldots,n$

C) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\right)$

D) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)\right), k=0,1,2,...,n-1$

E) $\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k=0,1,2,...,n-1$

38. $\sqrt[3]{z}$ түбірін есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right),\ k=0,1,2$

B) $\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right),\ k=0,1,2,3$

C) $\sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)\right)$

D) $\sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\varphi+2k}{3}\right)\right),\ k=0,1,2,...$

E) $\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,....,n-1$

39. $z=x+iy$ комплекс санының $x>0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\text{arg}z=\text{arctg}\,\frac{y}{x}+\pi$

B) $\text{arg}z=\text{arctg}\,\frac{y}{x}-\pi$

C) $\text{arg}z=\frac{\pi}{2}$

D) $\text{arg}z=-\frac{\pi}{2}$

E) $\text{arg}z=\text{arctg}\,\frac{y}{x}$

40. $z = x + iy$ комплекс санының $x < 0, y < 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$

B) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$

C) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

D) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

41. $z = x + iy$ комплекс санының $x < 0, y \geq 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$

B) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$

C) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

D) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

42. $z = x + iy$ комплекс санының $x = 0, y > 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$

B) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$

C) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

D) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

43. $z = x + iy$ комплекс санының $x = 0,\ y < 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$

B) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$

C) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

D) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

44. $z, w \in C$ болса, модульдің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

B) $\Re(z) \le |z|$ және $\Im(z) \le |z|$

C) $|z| = 2\sqrt{z\bar{z}}$

D) $|zw| = |z||w|$

E) $|z^n| = |z|^n$

45. $z, w \in C$ болса, модульдің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

B) $|z+w|=|z|+|w| \Leftrightarrow z=\lambda w$ немесе $w=\lambda z$ теңдігі орындалатындай $\lambda \in R$ саны бар болса

C) $\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$

D) $|z+w| \ge |z|+|w|$

E) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

46. $z=(x, y) \neq 0$ (нөлден өзгеше) комплекс санының аргументі неге тең?

A) анықталмаған
B) нөлге тең
C) нөлден үлкен
D) нөлден кіші
E) кез келген бұрыш

47. Модульдері тең нүктелердің жиыны нені анықтайды?

A) шеңберді
B) параболаны
C) гиперболаны
D) нүктені
E) түзуді

48. Аргументтері тең нүктелердің жиыны нені анықтайды?

A) координаталар басы аласталған (алып тастағандағы) ашық сәулені
B) координаталар басынан өтетін ашық сәулені
C) гиперболаны
D) нүктені
E) түзуді

49. $z=x+iy$ санының тригонометриялық пішінінің стандартты емес жазылымы?

A) $z=|z|(\cos\beta+i\sin\beta),\ \beta=\theta+2\pi k,\ k\neq 0,\ k\in Z$

B) $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

C) $x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\sin\theta$

D) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

E) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

50. $z = x + iy$ санының тригонометриялық пішінінің стандартты емес жазылымы?

A) $z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta),\ \beta = \theta + 2\pi k,\ k \neq 0,\ k \in Z$

B) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

C) $x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\sin\theta$

D) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

E) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Мысал 1: $z_1 = (3, -7),\ z_2 = (1, 4)$ сандары берілген. $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ сандарын табыңыз.

Шешімі:

a) Комплекс сандарға арифметикалық амалдар орындау келесі формулалардың көмегімен жүргізіледі:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) \qquad (1)$$

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2) \qquad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right),\ x_2^2 + y_2^2 \neq 0. \qquad (4)$$

b) (1) - (4) формулаларын қолданып, амалдарды жекелей орындасақ:

$$z_1 + z_2 = (3 + i(-7)) + (1 + i4) = (3+1) + i(-7+4) = 4 - 3i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 + i(-7)) - (1 + i4) = (3-1) + i(-7-4) = 2 - 11i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + i(-7)) \cdot (1 + i4) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4i + i(-7) \cdot 1 + i^2(-7) \cdot 4 =$$

$$= 3 + 12i - 7i + (-1) \cdot (-28) = 31 + 5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-7i}{1+4i}=\frac{(3-7i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{3-12i-7i+28i^2}{1^2+4^2}=\frac{3-19i-28}{17}=$$

$$=\frac{-25-19i}{17}=-\frac{25}{17}-\frac{19i}{17}.$$

C) Жауабы:

$$z_1+z_2=(4,-3),\ z_1-z_2=(2,-11),\ z_1\cdot z_2=(31,5),\ \frac{z_1}{z_2}=\left(-\frac{25}{17},-\frac{19}{17}\right).$$

Комплекс санының $z=x+iy$ алгебралық түріндегі жазылуын пайдаланып, комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдарды көпмүшеліктерге қолдану ережелері бойынша жүргізуге болатындықтан, осы есепті *екінші әдіспен* орындауға болады.

Мысал 2: 1-мысалдағы $z_1=(3,-7), z_2=(1,4)$ сандарының қосындысын, айырмасын, көбейтіндісін және қатынасын олардың $z=x+iy$ түріндегі жазылуын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$$z_1+z_2=(2+i(-5))+(3+i8)=(2+3)+i(-5+8)=5+3i,$$

$$z_1-z_2=(2+i(-5))-(3+i8)=(2-3)+i(-5-8)=-1-13i,$$

$$z_1\cdot z_2=(2+i(-5))\cdot(3+i8)=2\cdot 3+2\cdot i8+i(-5)\cdot 3+i^2(-5)8=$$

$$=6+16i-15i+40=46+i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i(-5)}{3+i8}=\frac{(2+i(-5))(3-i8)}{(3+i8)(3-i8)}=$$

$$=\frac{2\cdot 3+2\cdot(-i8)+i(-5)\cdot 3+i^2(-5)(-8)}{3^2+8^2}=$$

$$=\frac{6-16i-15i+40i^2}{73}=\frac{-34-31i}{73}=-\frac{34}{73}-\frac{31i}{73}.$$

Жауабы:

$$z_1+z_2=4-3i,\ z_1-z_2=2-11i,\ z_1\cdot z_2=31+5i,\ \frac{z_1}{z_2}=-\frac{25}{17}-\frac{19}{17}i.$$

Мысал 3:

1) $z_0 = 2,$

2) $z_1 = -i,$

3) $z_2 = 5i,$

4) $z_3 = -4,$

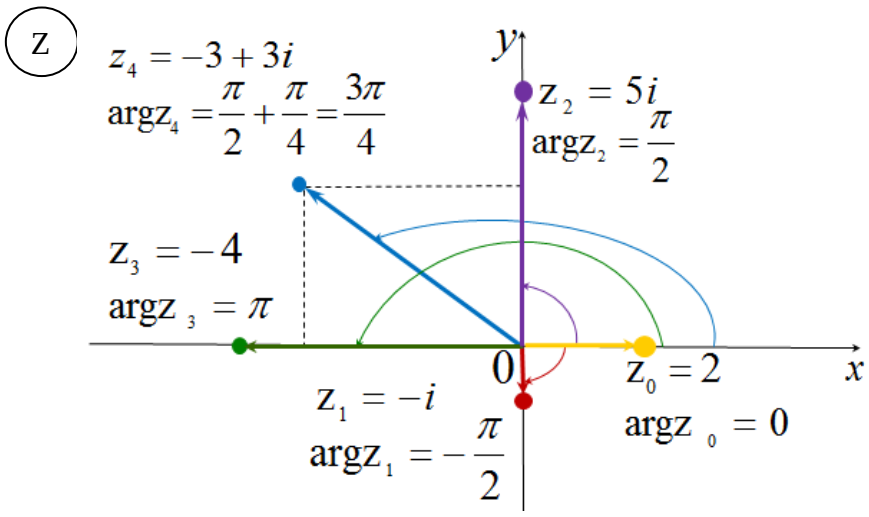
5) $z_4 = -3 + 3i$

комплекс сандарының аргументін оның геометриялық кескінделуін қолданып анықтаңыз.

Шешімі:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\ \dfrac{y}{x}, & \text{егер } x > 0 \\ arctg\ \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{егер } x < 0,\ y \geq 0 \\ arctg\ \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{егер } x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (5)$$

формуласымен аргументті табуға болады, бірақ комплекс сандарды геометриялық кескіндеу бұл формуланы жаттауды қажет етпейді (1-сурет).



1-сурет

1) $z_0 = 2$ саны Ox өсінің бойында жатқандықтан Ox өсінің $\mathbf{z}_0$ векторымен беттесуінің оң бағыты алынады, онда $\arg z_0 = 0$;

2) $z_1 = -i$ саны Oy өсінің бойында жатқандықтан Ox өсінің $\mathbf{z}_1$ векторымен беттесуінің теріс бағыты алынады, онда $\arg z_1 = -\frac{\pi}{2}$;

3) $z_2 = 5i$ саны Oy өсінің бойында жатқандықтан Ox өсінің $\mathbf{z}_2$ векторымен беттесуінің оң бағыты алынады, онда $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$;

4) $z_3 = -4$ саны Ox өсінің бойында жатқандықтан Ox өсінің $\mathbf{z}_3$ векторымен беттесуінің оң бағыты алынады, онда $\arg z_3 = \pi$;

5) $z_4 = -3 + 3i$ саны II ширектегі биссектрисаның бойында жатқандықтан Ox өсінің $\mathbf{z}_4$ векторымен беттесуінің оң бағытын алынып $\frac{\pi}{2}$ бұрышына $\frac{\pi}{4}$ бұрышын қоссақ, онда $\arg z_4 = \frac{3\pi}{4}$.

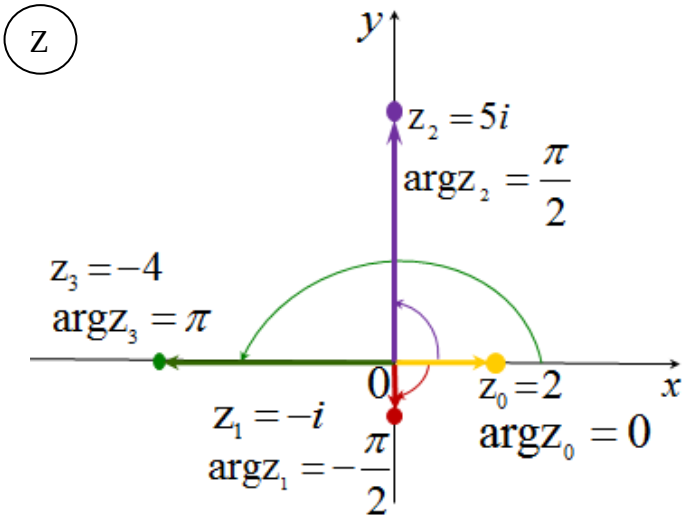
$z = x + iy$ комплекс санында x және y мәндерінің 0 ден үлкен немесе кіші болуына сәйкес комплекс санды бейнелейтін нүктенің геометриялық кескінделуін қарастырсақ (2-сурет):

$x > 0, \theta = 0$

$x < 0, \theta = \pi$

$yi,\ y > 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

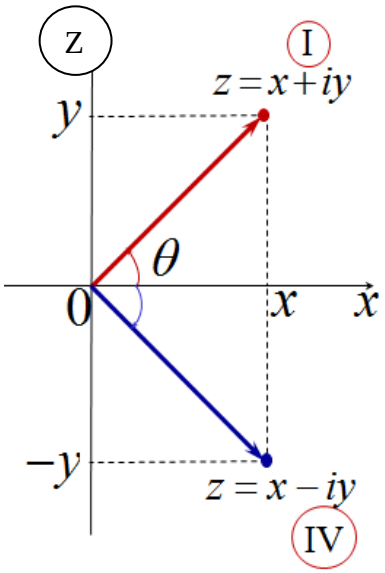
$yi,\ y < 0, \theta = -\frac{\pi}{2}$



2-сурет

Осы 2-суретіндегі геометриялық кескіндеулер (5) формуласында көрсетілген жағдайларға сәйкес келгенін көруімізге болады.

Сондай-ақ, комплекс санды бейнелейтін нүктенің I және IV-ширектерге түсуіне қатысты аргументті табуды оның геометриялық кескінделуімен анықтау үшін тікбұрышты үшбұрыштан тангенс бұрышты анықтап, оның кері функциясының мәндер жиынын, тақ болуын ескеруіміз қажет. Әрі ол (5) формуласының $x<0$ жағдайына сәйкес келеді (3-сурет).



3-сурет

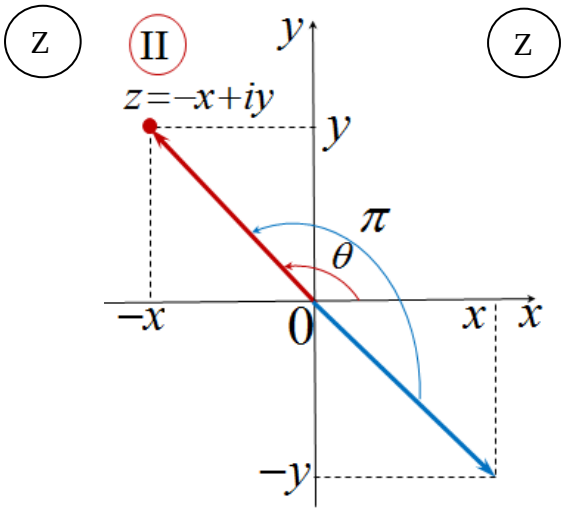
$$tg\,\theta=\frac{y}{x}$$

$$\theta=arctg\frac{y}{x}$$

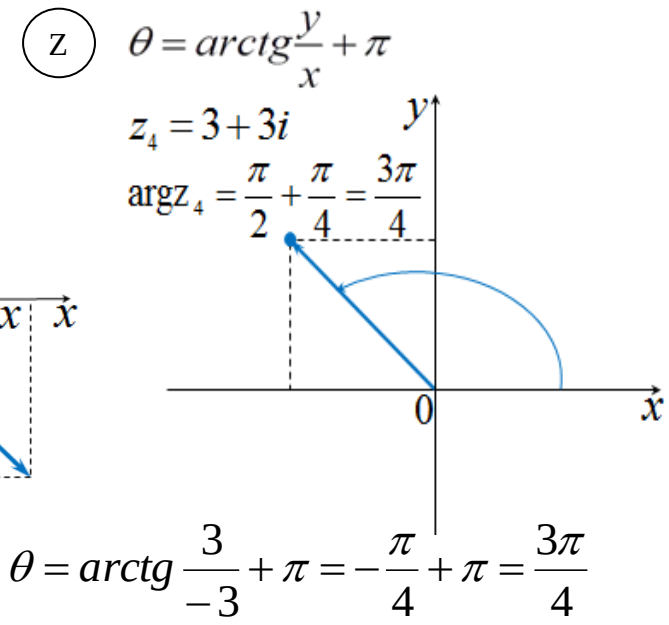
$$\theta=-arctg\frac{y}{x}$$

$$E(arctgx)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

II-ширектегі комплекс санның геометриялық кескінделуімен аргументтің мәнін есептеуді қарастырайық. Бұл ширекте x-теріс, y-оң сан, онда аргументтің теріс мәнін аламыз (4-сурет), ол IV -ширекке әкеледі. Сәйкесінше, ол (5) формуласының $x<0, y\geq 0$ жағдайына сәйкес келеді (5-сурет).



4-сурет

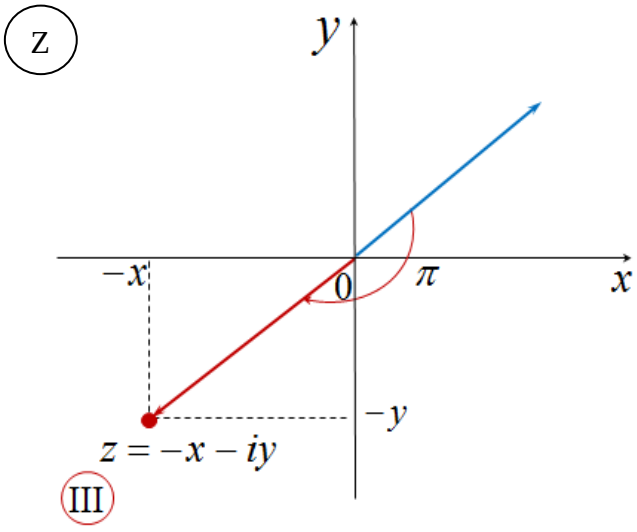


$$\theta = arctg\frac{3}{-3} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

5-сурет

III-ширектегі берілген комплекс санның геометриялық кескіні бойынша аргументін анықтауды қарастырайық. Бұл ширекте x те, y те теріс сан, онда аргументтің оң мәнін аламыз, ол I-ші ширекке әкеледі (6-сурет). Сәйкесінше, ол (5) формуласының $x<0, y<0$ жағдайына сәйкес келеді. Демек,

$$\theta = arctg\frac{y}{x} - \pi$$



6-сурет

Сонымен, әр ширектерге тиісті $z = x + iy$ комплекс саны үшін $\theta = arg\, z$ аргументін тапсақ:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x},\ x > 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi,\ x < 0,\ y > 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi,\ x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

(5) формуласының әр ширектерге қатысты жағдайлары және өзіміз қарастырған геометриялық кескіндеу бірдей нәтижеге әкелгенін көреміз.

Мысал 4: Келесі комплекс сандардың тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін анықтаңыз:

1) $z_1 = 2 + 2i,$

2) $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i,$

3) $z_3 = -\sqrt{3} - i,$

4) $z_4 = 2 - i2\sqrt{3}.$

Шешімі:

1) $z_1 = 2 + 2i$ комплекс саны берілсін.

1-әдіс:

z_1 санының модулі:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

аргументі

$$\theta_1 = \arg z_1 = arctg\,\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$$

комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

формуласы бойынша

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Комплекс санның көрсеткіштік пішінінің

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

формуласы бойынша

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2-әдіс: Сондай-ақ тригонометриялық пішінге келтірудің екінші әдісі тіптен жеңіл екенін көруге болады. Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз:

$$z_1 = 2 + 2\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

онда z_1 комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2) $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$ комплекс саны берілсін.

1-әдіс:

z_2 санының модулі:

$$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6,$$

аргументі

$$\theta_2 = \arg z_2 = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3},$$

комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

формуласы бойынша

$$z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Комплекс санның көрсеткіштік пішінінің

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

формуласы бойынша

$$z = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2-әдіс: Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз:

$$z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i = 6\left(-\frac{3}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6}i\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, \\ \sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

I және II ширекте $\cos\theta$ мәнін табуға болады, сондықтан $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ деп алған ыңғайлы, ал $\sin\theta$ алынса оны II ширекке сәйкес келетін бұрышқа бұруымыз керек.

Демек, z_2 комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

3) $z_3 = -\sqrt{3} - i$ комплекс саны берілсін.

1-әдіс:

z_3 санының модулі:

$$|z_3| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

аргументі

$$\theta_3 = \arg z_3 = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = -\frac{5\pi}{6},$$

комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

формуласы бойынша

$$z_3 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Комплекс санның көрсеткіштік пішінінің

$$z = |z| e^{i\varphi}$$

формуласы бойынша

$$z = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}.$$

2-әдіс: Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз,

$$z_3 = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

III ширекте $\sin\theta$ теріс мәнге ие, яғни $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Олай болса, z_3 комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z_3 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

4) $z_4 = 2 - i2\sqrt{3}$ комплекс саны берілсін.

1-әдіс:

z_4 санының модулі:

$$|z_4| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

аргументі

$$\theta_4 = \arg z_4 = arctg\frac{y}{x} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

формуласы бойынша

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Комплекс санның көрсеткіштік пішінінің

$$z = |z| e^{i\varphi}$$

формуласы бойынша

$$z = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

2-әдіс: Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз,

$$z_4 = 2 - i2\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}, \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

IV ширекте аргумент мәні теріс екенін ескерсек $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Олай болса, z_4 комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Мысал 5: Есептеңіз:

1) $(5-i)^2$;

2) $(3+i)^3$.

Шешімі:

1) $(5-i)^2 = 5^2 - 2\cdot 5i + i^2 = 25 - 10i - 1 = 24 - 10i;$

2) $(3+i)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 i + 3\cdot 3i^2 + i^3 = 27 + 27i + 9i^2 + i^2\cdot i =$
$= 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i.$

Алайда, комплекс санның дәрежесін бұл жолмен есептеу үнемі тиімді бола бермейтінін көруге болады.

Мысал 6: Есептеңіз:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$;

2) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{11}$;

3) $(1+i)^{13}$;

4) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$.

Шешімі:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1;$

2) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{11}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 11\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 11\right)=\cos\frac{11\pi}{3}+i\sin\frac{11\pi}{3}=$

$$=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

3)

Бірінші әдіс:

$$(1+i)^{13}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{13}=2^6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=64\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4}-4\pi\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{4}-4\pi\right)\right)=64\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=64\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-64-64i;$$

Екінші әдіс:

$$(1+i)^{13}=(1+i)^{12}(1+i)=\left((1+i)^2\right)^6(1+i)=\left(1+2i+i^2\right)^6(1+i)=(2i)^6(1+i)=$$

$$=64i^6(1+i)=-64(1+i)=-64-64i.$$

4)

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}=\left|\begin{matrix}|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2\\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right|=\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{11}=$$

$$= 2^{11}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 2^{11}\left(\cos\left(2\pi-\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{11\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{11}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 2^{10}\sqrt{3}+2^{10}i = 1024\sqrt{3}+1024i.$$

Мысал 7: $z=-1+i\sqrt{3}$ берілген. z^{60} мәнін есептеңіз.

Шешімі: $z=-1+i\sqrt{3}$ санын тригонометриялық түрде жазып алайық

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Жоғарғыда берілген

$$z^n = |z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) = r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

формуласын қолдансақ

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60} = 2^{60}\left(\cos\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi) = 2^{60}$$

нәтижесіне келеміз.

Мысал 8: Теңдеулерді шешіңіз:

1) $z^6+64=0$;

2) $z^2-4iz+12=0$.

Шешімі:

1) $z^6+64=0$

$z^6=-64$

$z=\sqrt[6]{-64}$

$$z=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right), k=0,1,2,3,4,5.$$

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$

$$z_2 = 2(0+i),$$

$$z_3 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$

$$z_4 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right),$$

$$z_5 = 2(0 - i),$$

$$z_6 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

2) $z^2 - 4iz + 12 = 0$ теңдеуін шешіңіз.

$$(z-2i)^2 + 4 + 12 = 0,$$

$$(z-2i)^2 = -16,$$

$$z-2i = \sqrt{-16},$$

$$z-2i = \sqrt{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right), k = 0,1.$$

$z-2i = 4i$ немесе $z-2i = -4i$

$z_1 = 6i, \quad z_2 = -2i.$