ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №7

САНДЫҚ ТІЗБЕКТЕР ЖӘНЕ ОНЫҢ ШЕКТЕРІ. ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ. ФУНКЦИЯ ШЕГІНІҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ.

Сандық тізбек және функция шектерін табудың келесі әдістерін қарастырамыз.

Бөлшектің алымы мен бөліміндегі көпмүшеліктердің ең үлкен дәрежесіне бөлу әдісі.

Мысал 1: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-8}{1-4n^2}$

Шешімі:

a) $\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығын ашу үшін, бөлшектің алымын да, бөлімін де n^2 дәрежесіне бөлеміз.

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n-8}{1-4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-4}=\frac{5+\frac{2}{\infty}-\frac{8}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-4}=-\frac{5}{4}.$$

c) Жауабы: $-\dfrac{5}{4}$.

Бөлшектің алымы мен бөліміндегі көпмүшеліктердің дәрежесін салыстыру әдісі.

Мысал 2: Шекті табыңыз:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-8}{1-4x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+9}{x^2-4x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+5}{5x^3-3x+8}$

Шешімі:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}0, & \text{егер} \quad n<m,\\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{егер} \quad n=m,\\ \infty, & \text{егер} \quad n>m.\end{cases}$$

b) 1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-8}{1-4x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{matrix}n=2\\ m=2\\ n=m\end{matrix}\right|=-\frac{5}{4};$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x+9}{x^2-4x-5}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{matrix}n=4\\ m=2\\ n>m\end{matrix}\right|=\infty;$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+5}{5x^3-3x+8}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{matrix}n=2\\ m=3\\ n<m\end{matrix}\right|=0.$$

c) Жауабы: $-\frac{5}{4};\ \infty;\ 0.$

Лопиталь ережесі бойынша шекті табу әдісі.

Мысал 3: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-8}{1-4n^2}$

Шешімі:

a) ***Теорема (Лопиталь ережесі).*** Егер $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ (яғни $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ қатынасының шегі $x=x_0$ нүктесінде $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарына әкелсе) және $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

болады.

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-8}{1-4x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+2}{-8x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{-8}=-\frac{5}{4}.$$

c) Жауабы: $-\frac{5}{4}$.

Функция шектерін табудың келесі әдістерін қарастырамыз.

Қарапайым түрлендірулер енгізіп шекті есептеу әдісі.

Мысал 4: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, мұндағы x_1, x_2 квадрат үшмүшеліктің түбірлері немесе $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ көбейткіштеріне жіктеп, бөлшекті ортақ көбейткішке қысқарту қажет.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{-2+2}{-2+3}=\dfrac{0}{1}=0.$

c) Жауабы. 0.

Лопиталь ережесі бойынша шекті табу әдісі.

Мысал 5: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

Шешімі:

a) ***Теорема (Лопиталь ережесі).*** Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (яғни $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ қатынасының шегі $x=x_0$ нүктесінде $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарына әкелсе) және

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

болады.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+4}{2x+5}=\frac{0}{1}=0.$$

c) Жауабы: 0.