ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №3

ВЕКТОРЛАР. ВЕКТОРЛАРДЫҢ СКАЛЯРЛЫҚ КӨБЕЙТІНДІСІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. ВЕКТОРЛАРДЫҢ ВЕКТОРЛЫҚ КӨБЕЙТІН-ДІСІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. ВЕКТОРЛАРДЫҢ АРАЛАС КӨБЕЙТІНДІСІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. ВЕКТОРЛАРДЫҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ.

Мысал 1: A(0;5;–2), B(–3;1;–3), C(7;2;0), D(3;–2;–1) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AD} \pm \overrightarrow{BC}$ координаталарын табыңыз.

Шешімі:

a) Басы $A(x_1; y_1)$ нүктесінде, ұшы $B(x_2; y_2)$ нүктесінде орналасқан $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталық түрі:

$\overrightarrow{AB} \in OXY \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$;

$\overrightarrow{AB} \in OXYZ \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Координаталық түрде берілген $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ үшін

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

болады.

b) $\overrightarrow{AD} = (3-0; -2-5; -1-(-2)) = (3; -7; 1)$;

$\overrightarrow{BC} = (7-(-3); 2-1; 0-(-3)) = (10; 1; 3)$;

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (3; -7; 1) + (10; 1; 3) = (3+10; -7+1; 1+3) = (13; -6; 4)$;

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = (3; -7; 1) - (10; 1; 3) = (3-10; -7-1; 1-3) = (-7; -8; -2)$.

c) Жауабы:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (13; -6; 4)$;

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = (-7; -8; -2)$.

Мысал 2: A(3;–1;0), B(5;3;4), C(0;–2;6) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

a) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес *векторларының скалярлық көбейтіндісі* деп

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\hat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \qquad (1)$$

санын айтамыз, белгіленуі: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ немесе $(\vec{a},\vec{b})$.

$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ және $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ координаталық векторлары үшін скалярлық көбейтінді:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2)$$

b) $\overrightarrow{AB}=(5-3;3-(-1);4-0)=(2;4;4);$

$\overrightarrow{AC}=(0-3;-2-(-1);6-0)=(-3;-1;6);$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2;4;4)\cdot(-3;-1;6)=2\cdot(-3)+4\cdot(-1)+4\cdot6=14.$

c) Жауабы: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=14.$

Мысал 3: $\vec{a}=(1;5;0)$, $\vec{b}=(3;-1;7)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

a) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ *векторларының векторлық көбейтіндісі* деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын айтамыз:

$\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$;

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\hat{\vec{a},\vec{b}}\right);$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - оң үштік құрайды.

$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ және $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ координаталық векторлары үшін векторлық көбейтінді:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k} \qquad (3)$$

b) (9.3) формуласы бойынша

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&5&0\\3&-1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&0\\-1&7\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\3&7\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&5\\3&-1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(35-0)\vec{i}-(7-0)\vec{j}+(-1-15)\vec{k}=35\vec{i}-7\vec{j}-16\vec{k}.$$

c) Жауабы: $\vec{a}\times\vec{b}=(35;-7;-16).$

Мысал 4: $\vec{a}=(2;3;0)$, $\vec{b}=(5;-1;0)$, $\vec{c}=(7;2;0)$ векторларының аралас көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

a) $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ *векторларының аралас көбейтіндісі* деп $\vec{a} \times \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін айтамыз да

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

түрінде белгілейміз. Анықтамадан $\vec{a}(a_x; a_y; a_z), \vec{b}(b_x; b_y; b_z), \vec{c}(c_x; c_y; c_z)$ *координаттық векторларының аралас көбейтіндісі*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

формуласы бойынша табылатыны шығады. Демек,

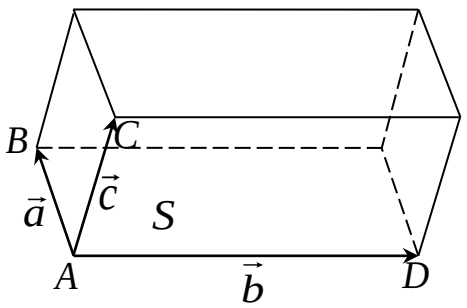
b) $$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

c) Жауабы: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$

Мысал 5: Төбелері A(1;2;–2), B(2;2;1), C(1;3;–3), D(1;3;0) нүктелері болатын параллелепипедтің көлемін табыңыз.

Шешімі:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторларға тұрғызылған параллелепипедтің көлемін береді:



$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})\right|.$$

b) $$\overrightarrow{AB} = (2-1;\ 2-2;\ 1-(-2)) = (1;0;\ 3);$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-1;\ 3-2;\ -3-(-2)) = (0;1;\ -1);$$
$$\overrightarrow{AD} = (1-1;\ 3-2;\ 0-(-2)) = (0;1;\ 2);$$

$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right| = |2 + 0 + 0 - 0 - 0 + 1| = |3| = 3.$$

c) Жауабы: $V = 3.$