ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №2

МАТРИЦАНЫҢ РАНГІСІ. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ НЕГІЗГІ АНЫҚТАМАЛАРЫ. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН

ШЕШУ ӘДІСТЕРІ. n БЕЛГІСІЗДІ n БІРТЕКТЕС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ. СЫЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ.

Тапсырма №1

«Матрицалар, олардың түрлері, амалдар қолдану», «Екінші, үшінші және n-ретті анықтауыштар, қасиеттері және есептеу әдістері», «Матрицаның рангісі. Сызықтық біртекті және біртексіз алгебралық теңдеулер жүйесі, шешу әдістері» тақырыптарының теориялық сұрақтарына жауап іздеу, білімді шыңдау.

1. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ көбейтіндісінен шығатын матрицаның жазылуын көрсетіңіз.

A) $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$

B) $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} a_1b_1 + & a_1b_2 + & a_1b_3 \\ a_2b_1 + & a_2b_2 + & a_2b_3 \\ a_3b_3 + & a_3b_3 + & a_3b_3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} a_1b_1 + & a_2b_1 + & a_3b_1 \\ a_1b_2 + & a_2b_2 + & a_3b_2 \\ a_1b_3 + & a_2b_3 + & a_3b_3 \end{pmatrix}$

E) $(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)$

2. Кез келген ретті анықтауыштың екі жолының немесе екі бағанасының орындарын ауыстырса, анықтауыштың ...
A) таңбасы өзгермейді
B) реті өзгереді
C) таңбасы ғана өзгереді
D) мәні өзгермейді
E) реті өзгермейді

3. Бірдей бағаналары немесе жолдары бар анықтауыштың мәні келесі санға тең болады:
A) 0
B) 1
C) 5
D) 6
E) 4

4. Егер анықтауыштың белгілі бір бағанасының (жолының) элементтеріне басқа бағанасының (жолының) элементтерін бір санға көбейтіп қосса, онда анықтауыштың ...
A) реті өзгереді
B) мәні өзгереді
C) таңбасы өзгереді
D) мәні өзгермейді
E) реті өзгермейді

5. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда оның анықтауышы … болуы мүмкін.
A) функция немесе сан
B) тек функция
C) тек нөлден айрықша сан
D) тек сан
E) тек нөл саны

6. $m \times n$ өлшемді матрица деп $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$

$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ түріндегі m жол мен n бағаннан тұратын тіктөртбұрышты кестені айтамыз, мұндағы a_{ij} - ... деп аталады.

A) матрицаның элементі
B) матрицаның анықтауышы
C) матрицаның миноры
D) матрицаның рангісі
E) матрицаның алгебралық толықтауышы

7. Элементтерінің барлығы нөлге тең матрица ... деп аталады.

A) нөлдік матрица
B) қарама-қарсы матрица
C) ауыстырымды матрица
D) үшбұрышты матрица
E) эквивалентті матрица

8. Бірдей өлшемді матрицалардың қосындысы деп олардың … матрицаны айтамыз**.**

A) сәйкес элементтерінің орындарын ауыстыруынан тұратын
B) сәйкес элементтерінің қосындыларынан тұратын
C) сәйкес элементтерінің айырмаларынан тұратын
D) сәйкес элементтерінің көбейтіндісінен тұратын
E) сәйкес элементтерінің қатынасынан тұратын

9. Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттерінің қайсысы дұрыс берілмеген?

A) $A + O = O + A = A$
B) $A + B = B + A$
C) $(A + B) + C = A + (B + C)$
D) $A - A = E$
E) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

10. Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттерінің қайсысы дұрыс көрсетілмеген?

A) $A+O=O+A=O$

B) $A+B=B+A$

C) $(A+B)+C=A+(B+C)$

D) $A-A=O$

E) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

11. $-A$ матрицасы A матрицасына … деп аталады.

A) қарама-қарсы матрица

B) нөлдік матрица

C) ауыстырымды матрица

D) үшбұрышты матрица

E) эквивалентті матрица

12. n ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің миноры деп

A) диагональдық элементтерінің көбейтіндісіне тең санды айтады

B) i -ші жолын және j -ші бағанасын сызғаннан пайда болған $(n-1)$ ретті матрицаны айтамыз

C) n ретті анықтауыштың i -ші жолын және j -ші бағанасын сызғаннан пайда болған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз

D) n ретті анықтауыштың i -ші жолын және j -ші бағанасын сызғаннан пайда болған $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз

E) n ретті анықтауыштың i -ші бағанасын және j -ші жолын сызғаннан пайда болған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз

13. A квадраттық матрица айрықша (ерекше) деп аталады, егер

A) $A\cdot A^{-1}=E$

B) $|A|\neq 0$

C) $|A|=0$

D) $A\cdot A^{-1}\neq E$

E) $|A|=1$

14. A – сызықты теңдеулер жүйесінің айнымалыларының алдындағы коэффициенттерінен құралған матрица, ал B – жүйенің кеңейтілген матрицасы болсын. Сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шартты көрсетіңіз.

A) $\text{rang}A > \text{rang}B$

B) $\text{rang}A < \text{rang}B$

C) $\text{rang}A = \text{rang}B$

D) $\text{rang}A \neq \text{rang}B$

E) $\text{rang}A - \text{rang}B = -1$

15. Бас диагональ элементтерінен басқа элементтері нөлге тең квадраттық матрица … деп аталады.

A) диагональдық матрица

B) қарама-қарсы матрица

C) нөлдік матрица

D) ауыстырымды матрица

E) эквивалентті матрица

16. Сызықты теңдеулер жүйесі анықталған деп аталады, егер оның

A) шексіз көп шешімі болса

B) жалғыз шешімі болса

C) анықтауышы нөлге тең болса

D) не шексіз көп шешімі бар, не шешімі жоқ болса

E) шешімі жоқ болса

17. A матрицасына A^{-1} кері матрица деп аталады, егер төмендегі теңдік орындалса (E – бірлік матрица):

A) $AE = A^{-1}$

B) $A^{-1}A = A^{-1}$

C) $A^{-1}E = A$

D) $A^{-1}A = E, \det A \neq 0$

E) $A^{-1}A = A$

18. Бірлік матрица дегеніміз не?

A) Барлық элементтері 1–ге тең тіктөртбұрыштық матрица

B) Барлық элементтері 1–ге тең квадраттық матрица

C) Анықтауышы 1–ге тең квадраттық матрица

D) Бас диагональ бойындағы элементтері 1–ге тең, ал қалған элементтері 0–ге тең квадраттық матрица
E) Көмекші диагональ бойындағы элементтері 1–ге тең, ал қалған элементтері 0–ге тең квадраттық матрица

19. Алгебралық толықтауыш үшін дұрыс теңдікті көрсетіңіз.
A) $A_{ij} = -M_{ij}$
B) $A_{ij} = M_{ij}$
C) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
D) $A_{ij} = (-1)^{i} M_{ij}$
E) $A_{ij} = (-1)^{j} M_{ij}$

20. Егер анықтауыштың жол (бағана) элементтерінің барлығы нөлге тең болса, онда анықтауыш
A) > 0
B) < 0
C) $= 0$
D) < 1
E) > 1

21. A матрицасының элементтерін олардың алгебралық толықтауыштарымен ауыстырғанда пайда болған матрицаны A матрицасының …деп атаймыз.
A) көмекші матрицасы
B) диагональдық матрицасы
C) бірлік матрицасы
D) үшбұрышты матрицасы
E) ауыстырымды матрицасы

22. Үш айнымалысы бар үш сызықты теңдеулер жүйесі не шексіз көп шешімі бар, не шешімі жоқ болады, егер оның матрицасының анықтауышы
A) нөлге тең болса
B) нөлге тең емес болса
C) бірге тең болса
D) бірден үлкен болса
E) бірден кіші болса

23. Үш айнымалысы бар үш сызықты теңдеулер жүйесінің шешімі болмайды, егер оның матрицасының анықтауышы
A) нөлге тең емес болса
B) нөлге тең болса
C) бірге тең болса
D) бірден үлкен болса
E) бірден кіші болса

24. Егер A және B матрицаларының бірін екіншісінен оған қарапайым түрендірулер қолдану арқылы алуға болса, онда A, B матрицалары … деп аталады.
A) нөлдік матрицалар
B) ауыстырымды матрицалар
C) жоғары үшбұрышты матрицалар
D) төменгі үшбұрышты матрицалар
E) эквивалентті матрицалар

25. Қай жағдайда A және B матрицаларының көбейтіндісі бар болады?
A) $A(3\times1)\cdot B(1\times2)$
B) $A(3\times1)\cdot B(2\times3)$
C) $A(3\times1)\cdot B(3\times2)$
D) $A(2\times3)\cdot B(2\times3)$
E) $A(1\times3)\cdot B(1\times2)$

26. Матрицаны тасымалдау дегеніміз не?
A) Матрицажолынбағанағаалмастыру
B) Керіматрицаныанықтау
C) Көмекшіматрицаныанықтау
D) Матрицааныктауышынесептеу
E) Кеңейтілген матрицаның рангісін есептеу

27. Егер қандай да бір жолдың (бағанасының) барлық элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыштың мәні
A) бірге тең
B) бірден үлкен санға тең
C) нөлге тең

D) алтыға тең
E) $k\,(k \neq 0)$ санына көбейтіледі

28. Егер анықтауыштың жолдарын (бағаналарын) сәйкес бағаналарымен (жолдарымен) алмастырсақ, анықтауыштың мәні
A) өзгермейді
B) таңбасын өзгертеді
C) нөлге тең
D) бірге тең
E) $k\,(k \neq 0)$санына санына кемиді

29. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ түріндегі матрица ... деп аталады.
A) диагональдық матрица
B) бірлік матрица
C) жоғары үшбұрышты матрица
D) төменгі үшбұрышты матрица
E) ауыстырымды матрица

30. Егер $A \cdot B$ және $B \cdot A$ көбейтінділері табылып, әрі $A \cdot B = B \cdot A$ болса, онда A және B матрицалары ... деп аталады.
A) нөлдік матрицалар
B) ауыстырымды матрицалар
C) жоғары үшбұрышты матрицалар
D) төменгі үшбұрышты матрицалар
E) бірлік матрицалар

31. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық матрицасының $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементтері ... деп аталады.
A) бас диагональ элементтері
B) қосалқы диагональ элементтері
C) жол элементтері

D) бағана элементтері
E) бос мүшелері

32. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық (текше) матрицасы ... деп аталады.
A) бірлік матрица
B) жоғарғы үшбұрышты матрица
C) нөлдік матрица
D) ауыстырымды матрица
E) төменгі үшбұрышты матрица

33. $C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық (текше) матрицасы ... деп аталады.
A) жоғарғы үшбұрышты матрица
B) бірлік матрица
C) төменгі үшбұрышты матрица
D) ауыстырымды матрица
E) нөлдік матрица

34. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасының A^{-1} кері матрицасы қай формуламен есептеледі?

A) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

B) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot E$

C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

D) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

E) $A^{-1} = E \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

35. Матрицасының рангісі деп нөлден айрықша осы матрицаның ... айтамыз.

A) ең үлкен ретін
B) ең үлкен элементін
C) ең кіші элементін
D) анықтауышының ең үлкен ретін
E) минорының ең үлкен ретін

36. Егер бірдей өлшемді екі матрицаның сәйкес элементтері тең болса, онда матрицалар .... деп аталады.

A) диагональдық матрицалар
B) квадраттық матрицалар
C) үшбұрышты матрицалар

D) тең матрицалар
E) тасымалданған матрицалар

37.Матрицаны рангісі оны тасымалдағаннан өзгере ме?
A) өзгермейді
B) нөлге тең болады
C) екі еселенеді
D) екіге кемиді
E) өзгереді

38. $A=(a_{11})$ бірінші ретті матрицасының анықтауышы деп ... санын айтамыз.
A) a_{12}
B) a_{13}
C) a_{11}
D) a_{21}
E) a_{22}

39. $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ түріндегі n белгісізді m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы - ....
A) бірлік матрица
B) белгісіздердің алдындағы коэффициенттер мен бос мүшеден құрылған матрица
C) белгісіздердің алдындағы коэффициенттерден құрылған матрица
D) бос мүшелер матрицасы
E) диагоналдық матрица

40. Матрицаның рангісі оның барлық элементтері нөлге тең жолды немесе бағанды сызсақ (алып тастасақ) өзгере ме?
A) өзгермейді
B) нөлге тең болады

C) екі еселенеді
D) екіге кемиді
E) өзгереді

41. Тек бір бағанадан тұратын $B(n,1)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ матрицасын ... деп атаймыз.
A) баған-матрица
B) жол-матрица
C) квадраттық матрица
D) диагональдық матрица
E) тасымалданған матрица

42. $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ берілген $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ жүйесінің ... деп атаймыз.
A) кеңейтілген матрицасы
B) жүйенің матрицасы
C) тасымалданған матрицасы
D) белгісіздер матрицасы
E) бос мүшелер матрицасы

43. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының анықтауышы неге тең?
A) $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
B) $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}$
C) $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
D) $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
E) $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$

44. A квадраттық матрицасы қайтымды немесе ерекше емес матрица деп аталады, егер ....

A) $A \cdot A^{-1} = E$
B) $\det A \neq 0$
C) $\det A = 0$
D) $A \cdot A^{-1} \neq E$
E) $\det A = 1$

45. Тек бір жолдан тұратын $A(1, m) = (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_m)$ матрицасын ... деп атаймыз:

A) баған-матрица
B) жол-матрица
C) квадраттық матрица
D) диагональдық матрица
E) тасымалданған матрица

46. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық матрицасының $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ бірдей индексті элементтері ... деп аталады.

A) бас диагональ элементтері
B) қосалқы диагональ элементтері
C) жол элементтері
D) бағана элементтері
E) бос мүшелері

47. Сызықты теңдеулер жүйесі біртекті деп аталады, егер

A) жүйенің бос мүшесінің біреуі нөлге тең болмаса
B) жүйенің бос мүшесінің біреуі нөлге тең болса
C) жүйенің бос мүшесінің барлығы нөлге тең болса
D) жүйенің босмүшесіңбарлығыбіргетеңболса
E) жүйенің тек бір ғана бос мүшесі бірге тең болса

48. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ екінші ретті анықтауышының есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

B) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$

C) $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$

D) $a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$

E) $a_{22}a_{21} - a_{11}a_{12}$

49. Дұрыс теңдікті таңдаңыз.

A) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$

C) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$

D) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$

50. Егер матрицаның жол және бағана сандары өзара тең болса, онда матрица .... деп аталады.

A) диагональдық матрица
B) квадраттық матрица
C) үшбұрышты матрица
D) бірлік матрица
E) тасымалданған матрица

n белгісізді n біртексіз сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістерін қарастырайық.

Мысал 1: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешімі:

а) Матрицалық әдіс.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

n белгісізді n біртексіз сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі берілсін.

Жүйені

$$AX = B \qquad (2)$$

матрицалық түрінде жазып аламыз, мұндағы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - жүйенің матрицасы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - бос мүшелер матрицасы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - белгісіздер матрицасы.

(2) теңдеуінің шешімі

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

екендігі шығады. (3) теңдігін

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

түрінде жазып алып, оның оң жағындағы көбейтіндіні есептесек

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз.

***Ескерту*:** Матрицалық әдіс жүйенің матрицасы қайтымды, яғни $\det A \neq 0$ жағдайында ғана қолданылады.

b) Жүйені

$$AX = B$$

матрицалық түрінде жазып аламыз, мұндағы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ - жүйенің матрицасы;

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ - бос мүшелер матрицасы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - белгісіздер матрицасы.

X матрицасын (4) формуласын қолданып табамыз. Жүйе матрицасының анықтауышы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

яғни жүйенің матрицасы қайтымды. Формуладағы алгебралық толықтауыштарды $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ формуласымен табамыз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

$\det A$ және алгебралық толықтауыштардың мәндерін X матрицасына қойсақ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -45+32+77 \\ -9+0-7 \\ -42+32+42 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз.

c) Жауабы: $(-4; 1; -2)$.

***Ескерту*:** Матрицалық әдіс бұл тараудың есептерін шығаруда есептеу жолы ұзақ болғандықтан тиімсіз екенін ескерген жөн. Сондықтан, аталған әдістердің уақыт үнемдеу мақсатында ең тиімдісін таңдаған дұрыс.

Мысал 2: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін Крамер ережесімен шешу керек.

Шешімі:

а) Крамер ережесі.

(1) жүйесінің коэффициенттерінен, олардың орналасу ретін сақтай отыра құрылған

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A$$

анықтауышы (1) жүйесінің *анықтауышы* деп аталады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда (1) жүйесінің шешімі

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}, \qquad (5)$$

формуласымен анықталады, мұндағы Δ_i - Δ анықтауышындағы i-ші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыш.

b) Жүйенің шешімін Крамер ережесімен табайық. Жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

онда (7.5) формуласы бойынша жүйенің шешімі

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - Δ анықтауышындағы сәйкесінше бірінші, екінші, үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыштар:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

Бұдан

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{64}{-16} = -4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{32}{-16} = -2.$$

c) Жауабы: $(-4; 1; -2)$.

Мысал 3: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін Жордан-Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешімі:

a) *Жордан-Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі).*

Матрицалық және Крамер әдістерін тек жолдарының саны бағандарының санына тең және де анықтауышы нөлден өзгеше жүйелерді шешу үшін ғана қолдана аламыз. Гаусс әдісінің ерекшелігі – оны кез келген жүйеге қолдануға болады.

Бұл әдіс жүйенің бір теңдеуін оған басқа бір теңдеуді бір санға көбейтіп алып қосқанда шыққан теңдеумен ауыстырғаннан жүйенің шешімі өзгермейді деген тұжырымға негізделген.

Аталған түрлендіруді тізбектеп қолдана отырып (7.1) жүйесінің теңдеулерінде белгісіздерді жою арқылы жүйе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}\ x_3 = b_3^{(2)} \end{cases} \qquad (6)$$

түріндегі үшбұрышты анықталған жүйеге немесе белгісіздер саны теңдеулер санынан артық болатын жүйеге, немесе үйлесімсіз жүйеге әкелінеді.

Бірінші жағдайда соңғы теңдеуден x_3 белгісізін тауып алып төменнен санағанда екінші теңдеуге қою арқылы x_2 белгісізін табамыз, сонан соң x_2, x_3 мәндерін бірінші теңдеуге қойып x_1 мәнін табамыз.

b) Жүйенің шешімін Жордан-Гаусс әдісімен табайық.

Екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жою үшін:
бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз;
бірінші теңдеуді (–3)-ке көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 0 - 6x_2 - x_3 = -4 \\ 0 - 16x_2 + 0 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -6x_2 - x_3 = -4 \\ -16x_2 = -16. \end{cases}$$

Жүйенің үшінші теңдеуінен x_2 белгісізін тауып, оны екінші теңдеудегі орнына қойсақ x_3 белгісізі, ал табылған x_2, x_3 белгісіздерін бірінші теңдікке қойсақ x_1 белгісізі табылады:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_2 + x_3 + 3 \\ x_3 = 4 - 6x_2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_3 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

c) Жауабы: $(-4; 1; -2)$.