Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 15

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

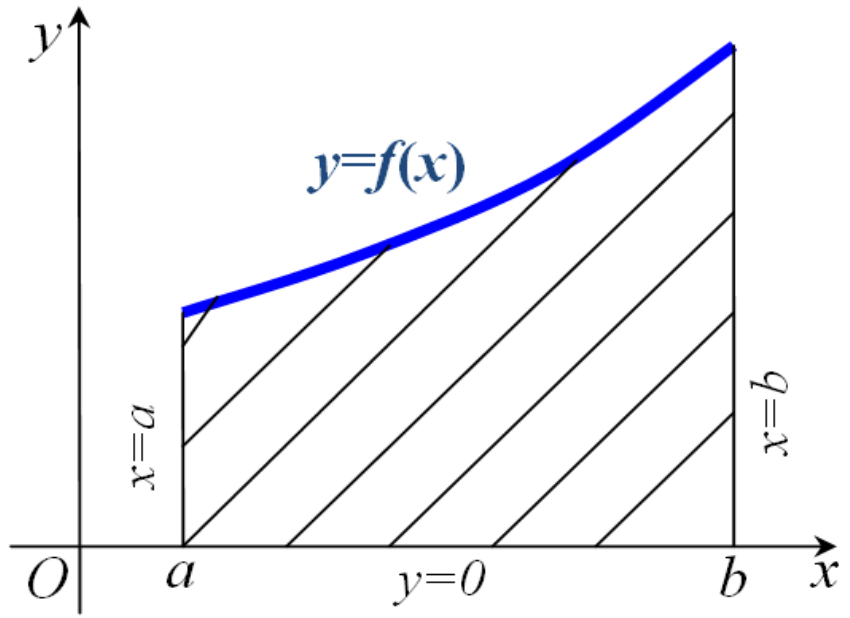
1. Жазық фигураның ауданын есептеу;
2. Қисықтың доғасының ұзындығын табу;
3. Дененің көлемін есептеу;
4. Анықталған интегралдың экономикада қолданылуы.

ЖАЗЫҚ ФИГУРАНЫҢ АУДАНЫН ЕСЕПТЕУ

1) Жоғарыдан теріс емес үзіліссіз $y = f(x)$ функциясының графигімен, төменнен OX өсімен ($y = 0$ түзуімен), сол жағынан $x = a$ және оң жағынан $x = b$ түзулерімен шектелген *қисық сызықты трапецияның* S *ауданын табу керек* (1-сурет).

Анықталған интегралдың геометриялық мағынасын қарастырғанда берілген функцияның берілген аралық бойынша интегралы осы ауданды беретіні көрсетілген болатын:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$



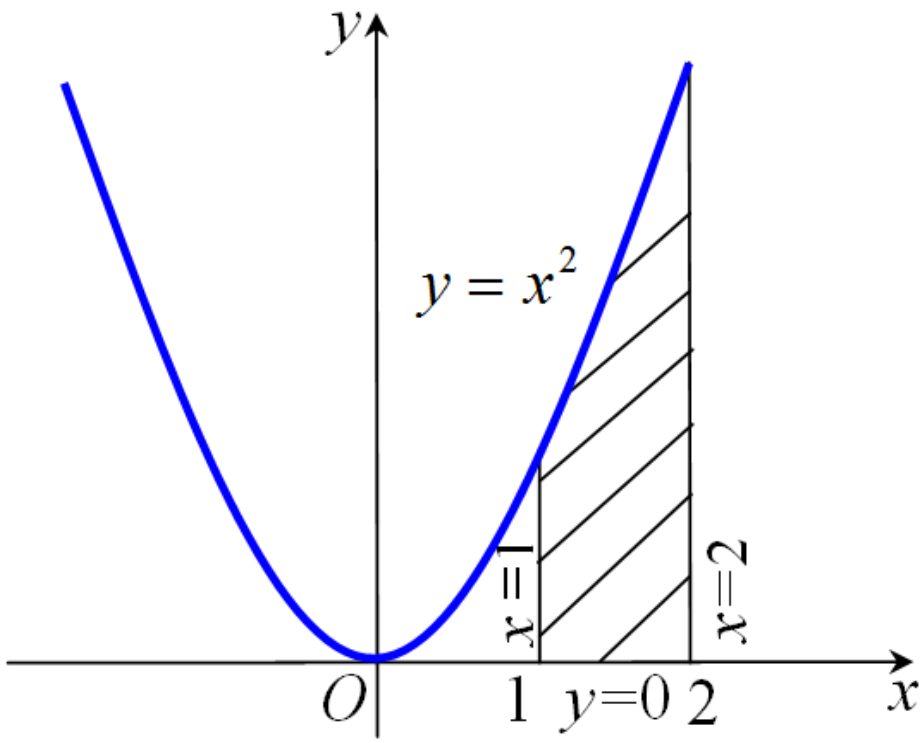
1-сурет

Мысал 1: $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

Шешімі: $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ сызықтарын тұрғызамыз (2-сурет).

Фигура жоғарыдан $y = x^2$, төменнен OX өсімен ($y = 0$ түзуімен), сол жағынан $x = 1$ және оң жағынан $x = 2$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапеция, яғни $f(x) = x^2, a = 1, b = 2$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

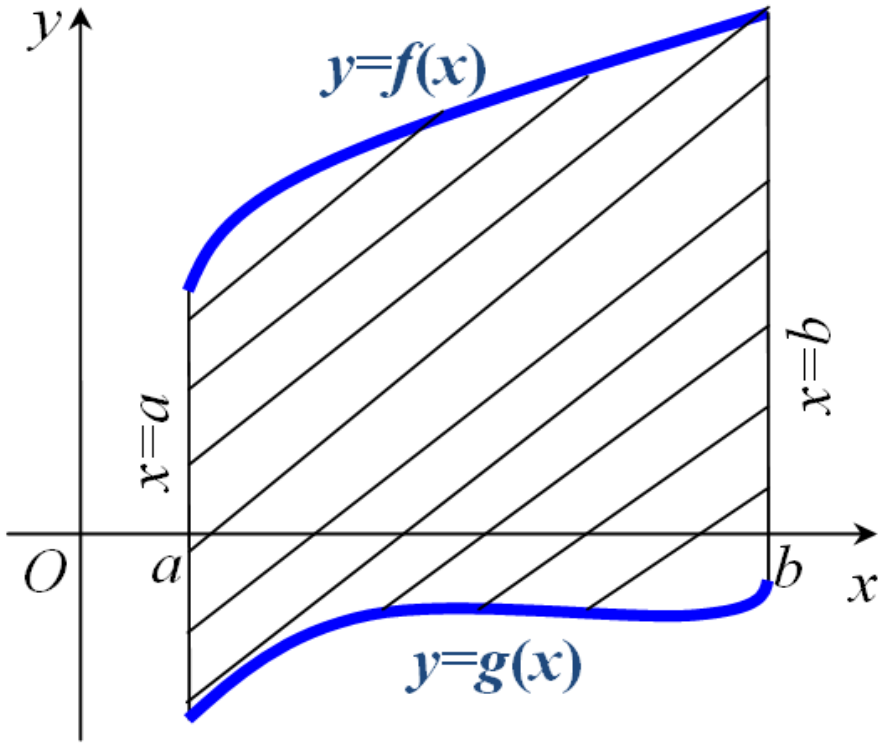


2-сурет

Салдар 1. $y = f(x)$, $y = g(x)$ үзіліссіз функцияларының графиктерімен, $x = a$ және $x = b$ $(a < b)$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \qquad (2)$$

формуласымен табылады (3-сурет).



3-сурет

Мысал 2: $y=x$ және $y=2-x^2$ функцияларының графиктерімен және $x=0, x=2$ түзулерімен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

Шешімі: $y=x, y=2-x^2, x=0, x=2$ сызықтарын тұрғызамыз (4-сурет).

Есептің шарты бойынша $a=0, b=2, f(x)=x, g(x)=2-x^2$:

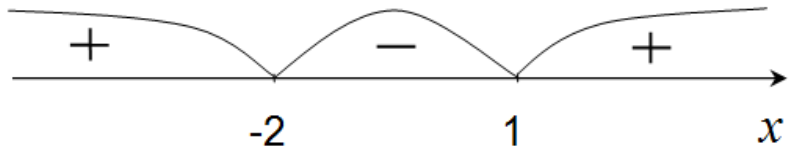
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_0^2 |x-(2-x^2)|dx=\int_0^2 |x^2+x-2|dx \Rightarrow$$

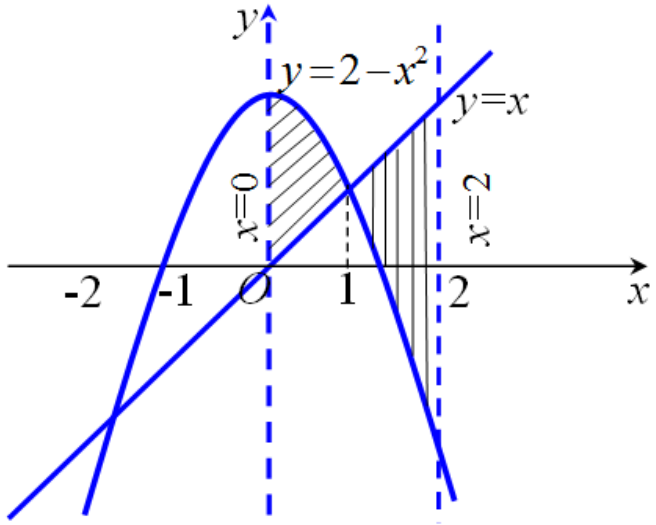
$$S=\int_0^2 |x^2+x-2|dx$$

$|x^2+x-2|$ модулінің мәнін анықтау үшін x^2+x-2 үшмүшелігінің таңбасы тұрақты болатын аралықтарды анықтаймыз:

$$x^2+x-2=0$$

$$x_1=-2, x_2=1$$





4-сурет

$$x\in[0,1]\Rightarrow x^2+x-2\le 0\Rightarrow |x^2+x-2|=-(x^2+x-2)=-x^2-x+2,$$

$$x\in[1,2]\Rightarrow x^2+x-2\ge 0\Rightarrow |x^2+x-2|=x^2+x-2.$$

$$S=\int_0^2 |x^2+x-2|dx=\int_0^1 |x^2+x-2|dx+\int_1^2 |x^2+x-2|dx=\int_0^1 (-x^2-x+2)dx+\int_1^2 (x^2+x-2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2=3.$$

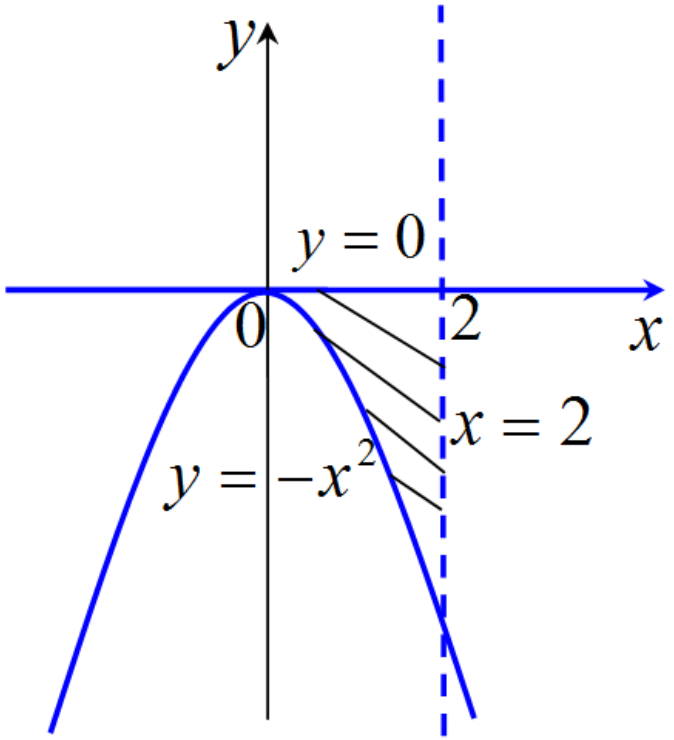
Мысал 3: $y=-x^2$ және $y=0, x=2$ функцияларының графиктерімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $f(x)=-x^2,\ g(x)=0.$

$y=-x^2$ және $y=0, x=2$ функцияларының графиктерін тұрғызамыз (5-сурет).

$y=-x^2$ және $y=0$ сызықтарының қиылысу нүктесінің абциссасын табамыз:

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -x^2=0 \Rightarrow x=0.$$



5-сурет

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_0^2 |-x^2-0|dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

2) Егер 1) бөліміндегі қисық сызықты трапецияны шектейтін $y = f(x)$ қисығы $[\alpha, \beta]$ сегментінде теріс емес $y(t)$ функциясы мен бірсарынды, үзіліссіз дифференциалданатын және $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ теңдіктерін қанағаттандыратын $x(t)$ функциялары арқылы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases} \qquad (3)$$

параметрлік түрінде берілсе, онда бұл қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \qquad (4)$$

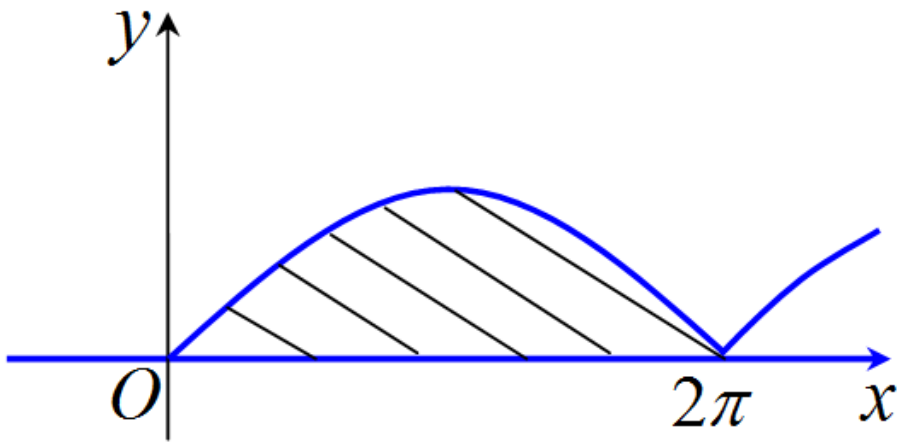
формуласымен есептелінеді.

Мысал 4: OX өсімен

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

циклоидасының бір тармағымен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі: Циклоиданың графигін тұрғызамыз (6-сурет).



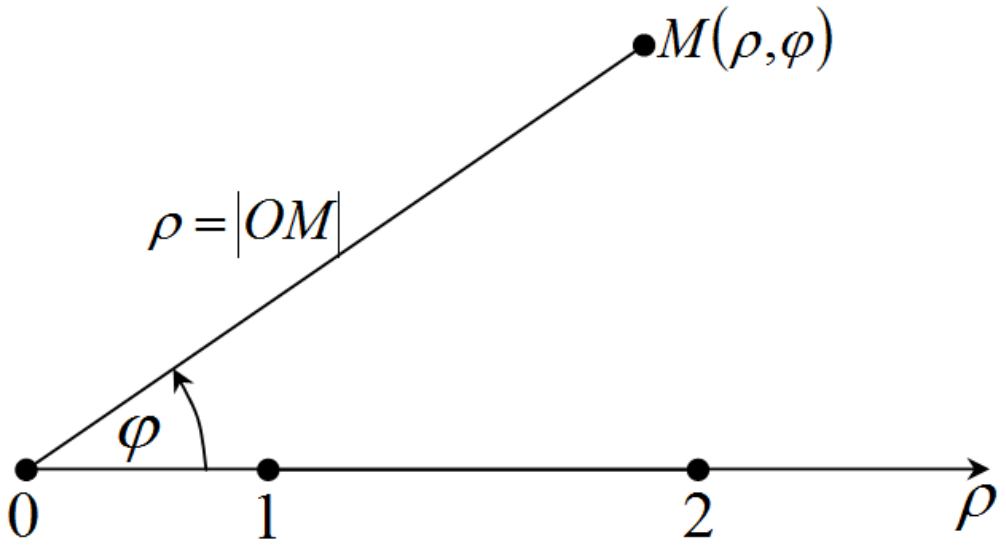
6-сурет

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{0}^{2\pi} 2(1-\cos t)\big(2(t-\sin t)\big)'dt = \int_{0}^{2\pi} 2(1-\cos t)2(1-\cos t)dt = 4\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= 4\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt = 4\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right) = \left(4t-8\sin t+2t+\sin 2t\right)\Big|_{0}^{2\pi} = 8\pi+4\pi = 12\pi.$$

3) *Полярлық координаталар жүйесінде берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданы.*

Полярлық координаталар жүйесінде жазықтықтың кез келген M нүктесі осы нүктеден берілген $O\rho$ жарты сандық өсінің O бас нүктесіне дейінгі $\rho = |OM|$ қашықтығы мен O бас нүктесінен M нүктесі арқылы өтетін сәуленің $O\rho$ жарты өсімен жасайтын $\varphi = \left(\widehat{O\rho, OM}\right)$ бұрышы арқылы беріледі.

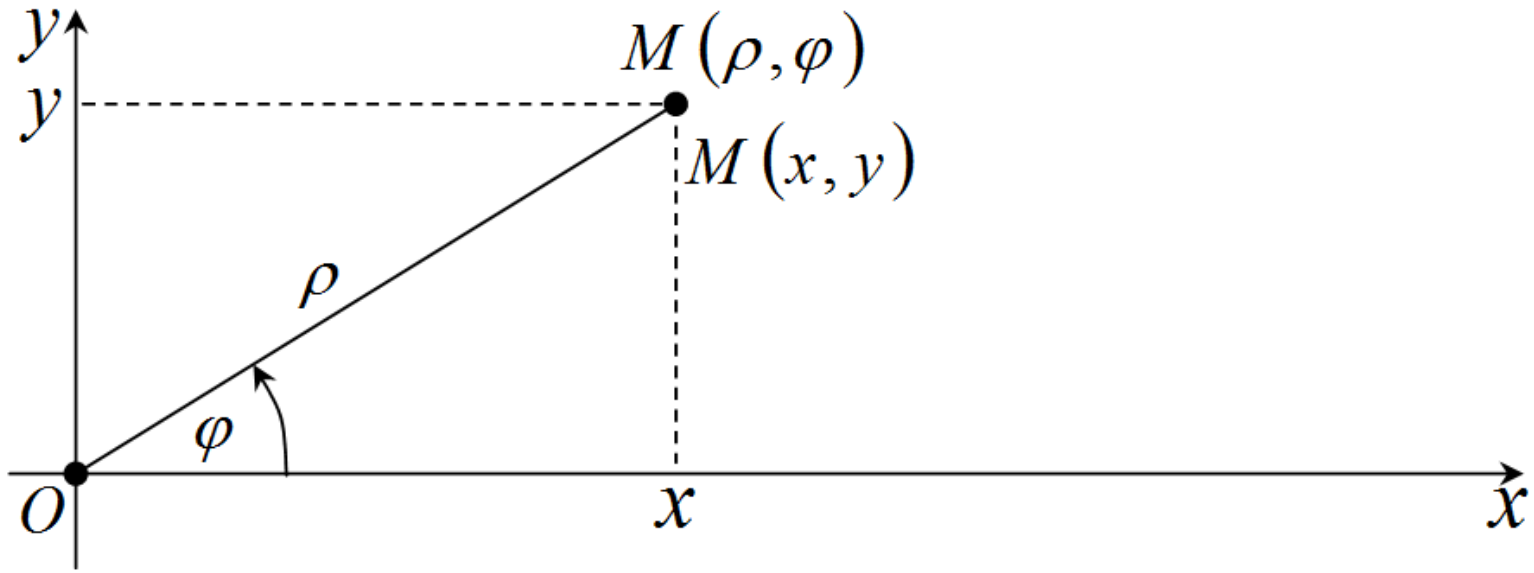


$M(\rho,\varphi)$: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (немесе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$);

- *бұрышын анықтаудың оң бағыты* ретінде сағат тілінің айналу бағытына қарама – қарсы бағытты аламыз.
- жарты сан өсі – *полярлық өс*,
- O нүктесі – *полюс* деп аталады.

Егер $O\rho$ полярлық өсін XOY декарттық координаталар жүйесінің OX жарты өсімен беттестіре орналастырсақ полярлық координаталар мен декарттық координаталар арасындағы келесі байланысты аламыз (полярлық координаталардан декарттық координаталарға көшу формуласын) аламыз:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



$[\alpha,\beta]$ кесіндісінде үзіліссіз $\rho = f(\varphi)$ функциясының графигімен және $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ сәулелерімен шектелген OAB *қисық сызықты үшбұрышының* S *ауданын* табайық (7-сурет).

$[\alpha,\beta]$ кесіндісін (бұрыш аралығын)

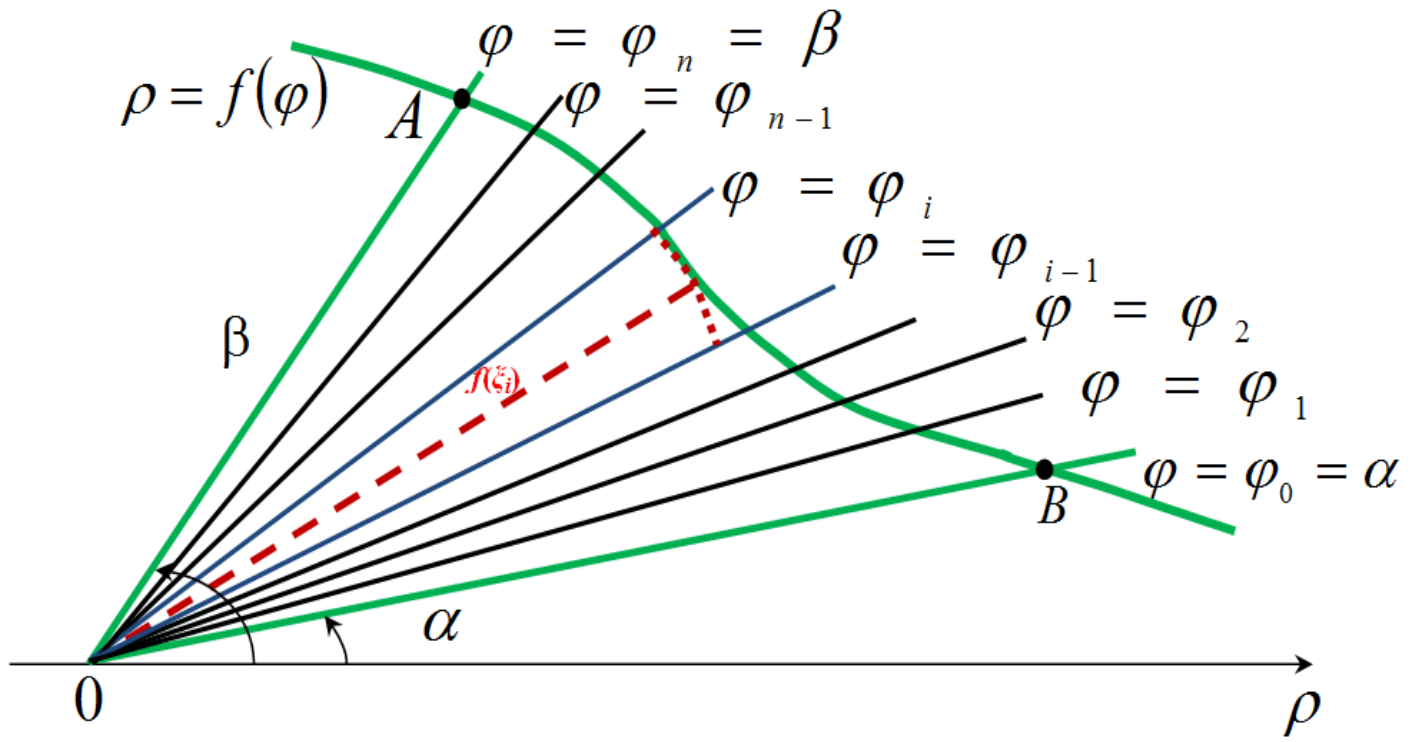
$$\varphi = \varphi_0 = \alpha, \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, ..., \varphi = \varphi_{n-1}, \varphi = \varphi_n = \beta$$

сәулелерімен n бөлікке бөлеміз.

$[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ аралығынан бір ξ_i нүктесін алып $\varphi=\varphi_{i-1}, \varphi=\varphi_i, \ (i=\overline{1,n})$ сәулелерімен шектелген әрбір бөлік қисық сызықты үшбұрыштың ауданын радиусы $f(\xi_i)$, бұрышы $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ болатын дөңгелек сектордың ауданымен ауыстырсақ S ауданының

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$

жуықтауын аламыз.



7-сурет

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$ қосындысы $\rho=\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ функциясының $T=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m\}$ бөліктеуі мен оған сәйкес $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$ таңдамасы бойынша құрылған $[\alpha,\beta]$ кесіндісіндегі интегралдық қосындысы болғандықтан, оның $\lambda=\max_{i=\overline{1,n}}\Delta\varphi_i$ диаметрі нөлге ұмтылғандағы шегі $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}f^2(\varphi)d\varphi$ интегралын береді:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)\Delta\varphi\,. \tag{5}$$

Сонымен қатар, λ нөлге ұмтылғанда $\Delta\varphi_i$ де нөлге ұмтылып, дөңгелек сектор сәйкес қисық сызықты бөлік үшбұрышпен беттесуге ұмтылады да,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$

қосындысының шегі берілген қисық сызықты үшбұрыштың S ауданына ұмтылады:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i=S\,. \tag{6}$$

(5), (6) теңдіктерінен

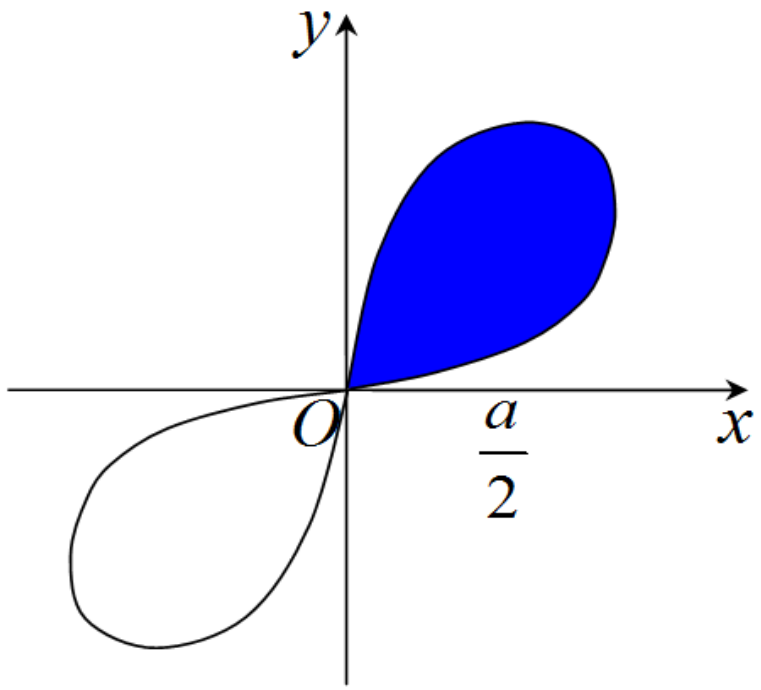
$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)d\varphi \tag{7}$$

қисық сызықты үшбұрыштың ауданын табу формуласын аламыз.

Мысал 5: $\rho = a\sin 2\varphi,\ a > 0$ (екі жапырақты) функциясының графигімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі: $\rho = a\sin 2\varphi,\ a > 0$ функциясының графигін тұрғызамыз (8-сурет).

Фигураның S ауданы $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ секторындағы фигураның S_1 ауданын 2 еселегенге тең болады: $S = 2S_1$.



8-сурет

$$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin 2\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos 4\varphi)}{2}d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\varphi d(4\varphi)\right) = \frac{a^2}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Жазық фигураның ауданын есептеу формулаларын атаңыз.



ҚИСЫҚТЫҢ ДОҒАСЫНЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫН ТАБУ

Бізге $x \in [a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының графигінің $\overset{\smile}{AB}$ доғасының L ұзындығын табу керек.

Алдымен доғаның ұзындығы ұғымын берейік. $\overset{\smile}{AB}$ доғасын, доғаның $A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n) = B$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлеміз де, $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ сынық сызығын тұрғызамыз (9-сурет).

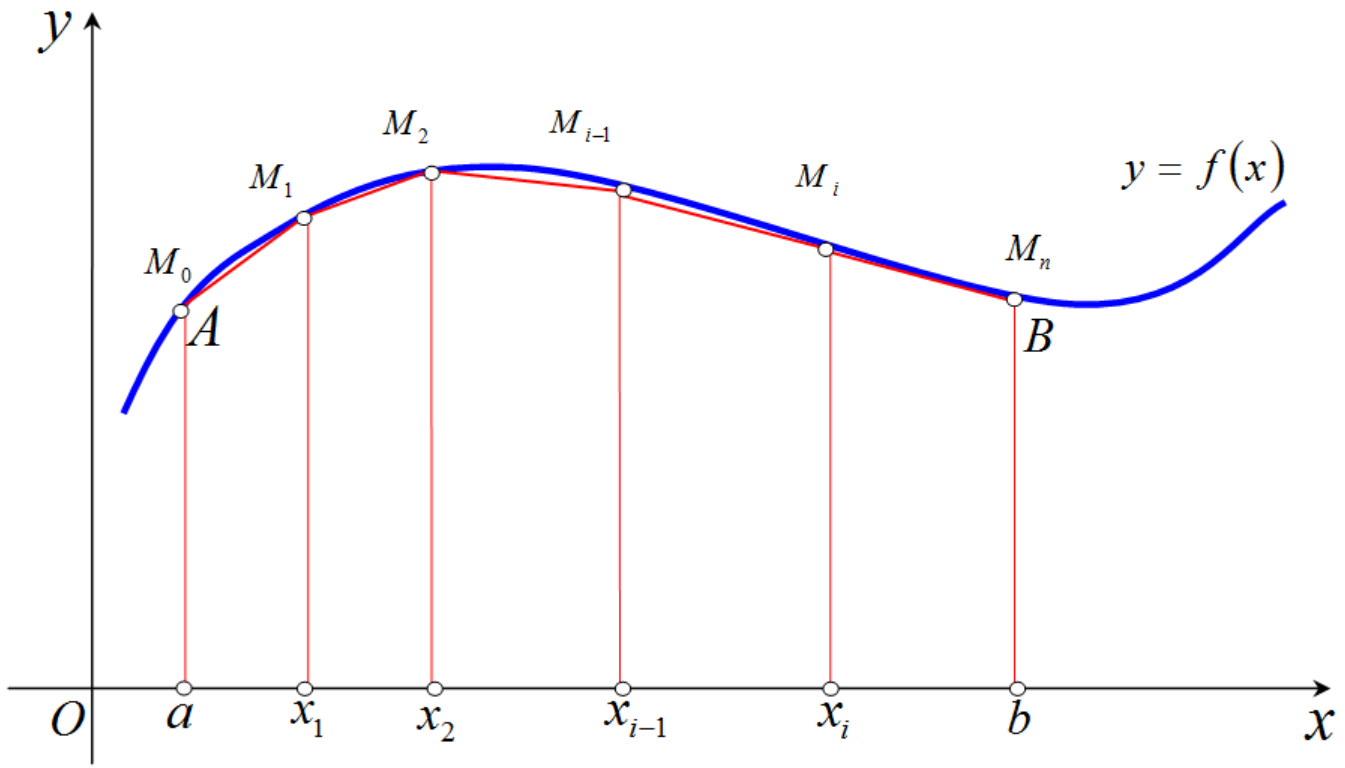
$\Delta(M_{i-1}, M_i)$ сынық сызықтың $M_{i-1}M_i$ кесіндісінің ұзындығы $(i = 1,2,\ldots,n)$, ал γ сынық сызықтың кесінділерінің ұзындықтарының ең үлкені болсын:

$$\Delta(M_{i-1}, M_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2};$$
$$\gamma = \max_{i=\overline{1,n}} \{\Delta(M_{i-1}, M_i)\}.$$

Сынық сызықтың ұзындығы

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

қосындысына тең болады.



9-сурет

Анықтама 1: $\overset{\smile}{AB}$ *доғасының ұзындығы* деп $\lim\limits_{\gamma\to 0} L_n$ шегін айтамыз:

$$L=\lim_{\gamma\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left(y_i-y_{i-1}\right)^2}\ .$$

Ұзындығы бар (көрсетілген шек бар) *қисық түзетілетін қисық* деп аталады.

Соңғы теңдіктен, Лагранж теоремасы бойынша $[x_{i-1},x_i]$ аралығында $y_i-y_{i-1}=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ теңдігі орынды болатын бір ξ_i нүктесі табылатындықтан,

$$L=\lim_{\gamma\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Бұдан, $\gamma\to 0\Leftrightarrow\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\Delta x_i\to 0$ және $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$ қосындысының $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі интегралдық қосындысы екенін ескерсек,

$$L=\lim_{\gamma\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

теңдігі шығады. Сонымен, $\overset{\smile}{AB}$ *доғасының ұзындығы:*

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx\ .\qquad(8)$$

Мысал 6: $y=\frac{3}{4}x-1$ қисығының $A(0;-1), B(4;2)$ нүктелерімен шектелген доғаның ұзындығын табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $f(x)=\frac{3}{4}x-1,\ a=0,\ b=4.$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx=\int_0^4\sqrt{\frac{16+9}{16}}dx=\frac{5}{4}\int_0^4 dx=\frac{5}{4}x\Big|_0^4=5.$$

Салдар 2. $\overset{\smile}{AB}$ доғасы $x(t), y(t)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар арқылы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

параметрлік түрде берілсе, онда $\overset{\smile}{AB}$ доғасы түзетілетін болады да оның ұзындығы

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \,. \qquad (9)$$

формуласымен табылады.

Мысал 7:

$$\begin{cases} x = 2\cos t\ , \\ y = 2\sin t, \\ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \end{cases}$$ доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі: доғаның ұзындығы:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt =$$

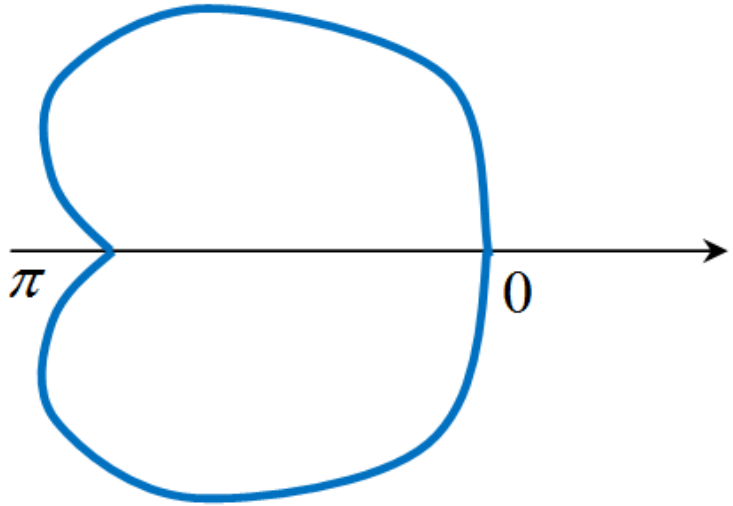
$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Салдар 3. Егер $\overset{\smile}{AB}$ доғасы полярлық координаталарда үзіліссіз дифференциалданатын $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ функциясы арқылы берілсе, онда ол түзетілетін қисық болады да, оның ұзындығы

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi . \qquad (10)$$

формуласымен табылады.

Мысал 8: $\rho = a(1+\cos\varphi)$ кардиоидасының ұзындығын табыңыз.



10-сурет

Шешімі: Косинус функциясы периодты $\Rightarrow -\pi < \varphi \le \pi$ (10-сурет).

Доғаның ұзындығының ρ функциясының жұптығын ескере отырып есептейміз:

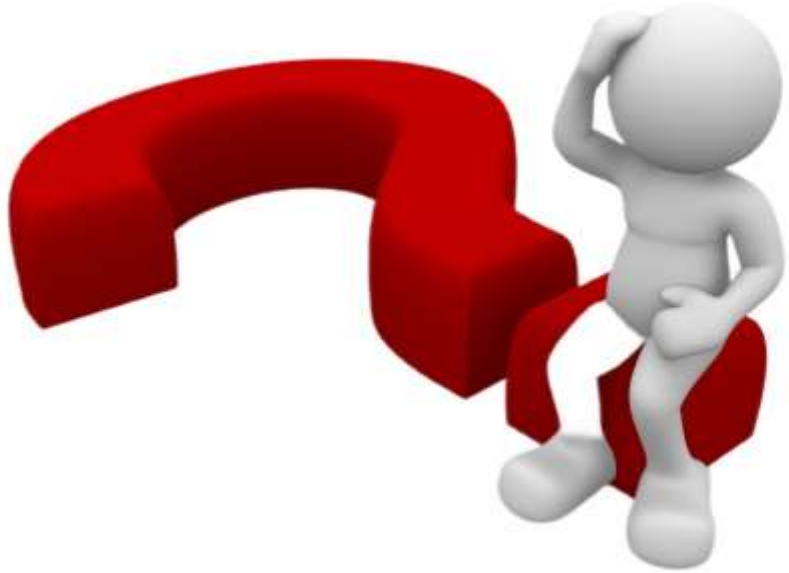
$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}\,d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=2\cdot 4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi}=8a\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=8a.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Қисықтың доғасының ұзындығын есептеу формулаларын атаңыз.



ДЕНЕНІҢ КӨЛЕМІН ЕСЕПТЕУ

а) *Көлденең қимасының ауданы берілген дененің көлемін есептеу*

Бізге екі бүйірінен $x=a$ және $x=b$ жазықтықтарымен шектелген және OX өсіне x нүктесі арқылы перпендикуляр өтетін жазықтықпен қиылған қимасының ауданы тек x-тен тәуелді $S(x)$ функциясы ретінде берілген дененің V көлемін табу керек (11-сурет).

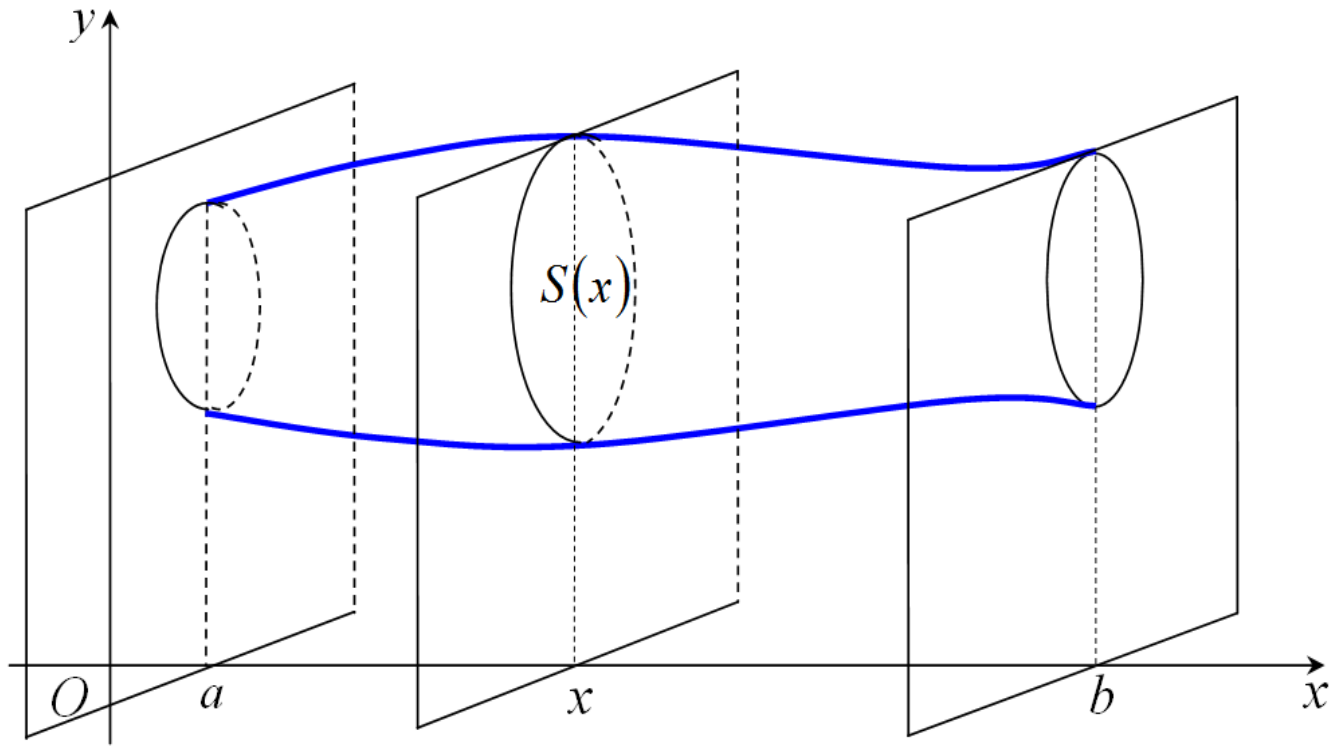
Егер берілген денені

$$x = x_0 = a,\ x = x_1,\ x = x_2,\ \ldots,\ x = x_n = b$$

жазықтықтарымен $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ n бөлікке бөліп дененің $x = x_{i-1}$ және $x = x_i$ $(i = \overline{1,n})$ жазықтықтарымен шектелген әрбір бөлігінің көлемін табан ауданы $S(\xi_i),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, биіктігі $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ болатын цилиндрдің $S(\xi_i)\Delta x_i$ көлемімен жуықтасақ, онда берілген дененің көлемінің

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$$

жуықтауын аламыз.



11-сурет

Бұл жуықтаудың $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ шамасын нөлге ұмтылдырғандағы шегі, біріншіден, *дененің* V *көлеміне*, екіншіден, $\sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$ қосындысы $S(x)$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі интегралдық қосындысы болғандықтан, $\int\limits_a^b S(x)dx$ интегралына тең болады:

$$\lim_{\lambda\to 0} V_n = V \text{ және } \lim_{\lambda\to 0} V_n = \int_a^b S(x)dx \Rightarrow$$

$$V = \int_a^b S(x)dx \,. \qquad (11)$$

ә) *Айналу денесінің көлемін есептеу*

1) Жоғарыдан $y = f(x)$ үзіліссіз функциясының графигімен, төменнен OX өсімен, бүйірлерінен $x = a, x = b\,(a < b)$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияны OX өсінен айналдырғанда пайда болған айналу денесінің V көлемін табу керек (12-сурет).

Дене айналу денесі болғандықтан, оның x нүктесіндегі көлденең қимасы радиусы $f(x)$ санына тең болатын дөңгелек болады да, қиманың ауданы

$$S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$$

болады.

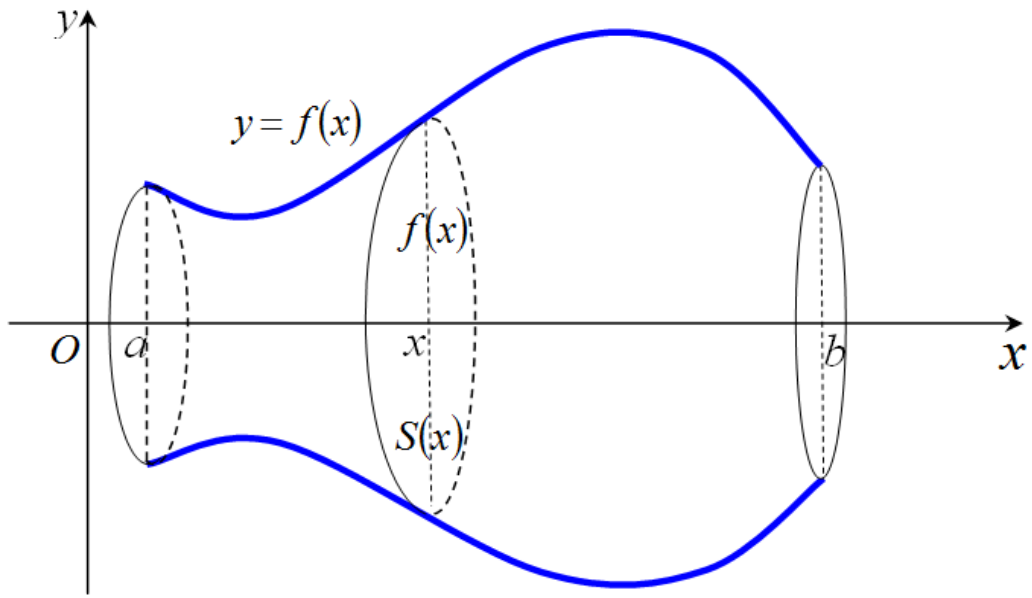
Олай болса, (11) формуласы бойынша

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx\,.$$

Сонымен, OX *өсін айналу денесінің көлемі*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (12)$$

формуласымен табылады.



12-сурет

Мысал 9: $y = 1 - x^2$ және $y = 0$ сызықтарымен шектелген фигураны OX өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

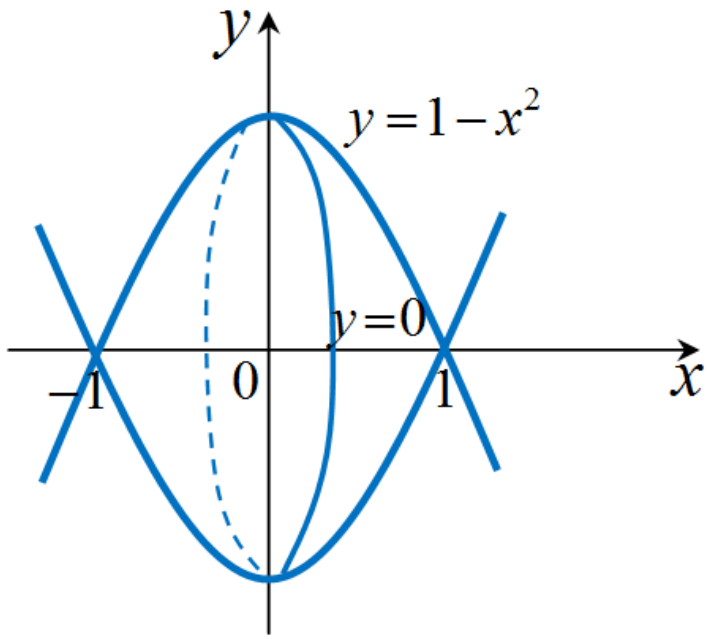
Шешімі: $y = 1 - x^2$ және $y = 0$ сызықтарын тұрғызамыз (13-сурет). Есептің шарты бойынша $f(x) = 1 - x^2$, ал a, b ізделіну қажет.

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow a = -1, b = 1.$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right)dx =$$

$$= \pi \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \pi \left(1 - (-1) - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) =$$

$$= \pi \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{16}{15}\pi.$$



13-сурет

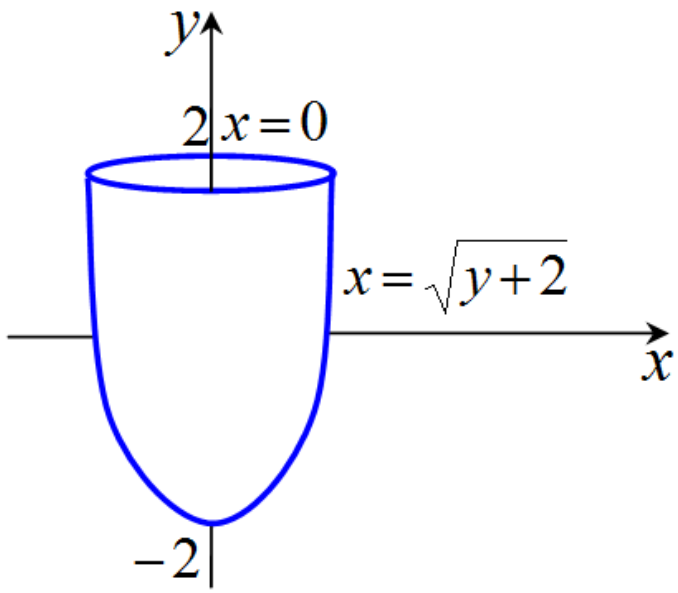
$x = \varphi(y)$ үзіліссіз функциясының графигімен, OY өсімен, $y = c$, $y = d$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияны OY *өсінен айналдырғанда пайда болған даненің көлемі*

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy \qquad (13)$$

формуласымен табылады.

Мысал 10: $x=\sqrt{y+2},\ x=0,\ y=2$ сызықтарымен шектелген фигураны OY өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

Шешімі: $x=\sqrt{y+2},\ x=0,\ y=2$ сызықтарын тұрғызамыз (14-сурет). Есептің шарты бойынша $\varphi(y)=\sqrt{y+2},$ ал c,d ізделіну қажет.



14-сурет

$$0=\sqrt{y+2}\Rightarrow 0=y+2, y=-2$$
$$c=-2, d=2.$$

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)d=\pi\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{y+2}\right)^2 dy=\pi\int_{-2}^{2}(y+2)d(y+2)=\pi\left.\left(\frac{(y+2)^2}{2}\right)\right|_{-2}^{2}=8\pi.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Дененің көлемін есептеу формулаларын атаңыз.



АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ЭКОНОМИКАДА ҚОЛДАНЫЛУЫ

1) Өндіріс өнімділігі

$z = f(t)$ функциясы өндіріс өнімділігінің уақытқа байланысты өзгеруін сипаттасын. $[0;T]$ уақыт аралығында өндірілген өнім мөлшерін анықтайық. Өнім мөлшерін u әрпімен белгілейік.

$[0;T]$ уақыт аралығын

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$$

нүктелерімен

$$[t_0 ; t_1], [t_1 ; t_2], \ldots, [t_{n-1} ; t_n]$$

бөлік кесінділерге (бөлік уақыт аралықтарына) бөлеміз.

$[t_{i-1};t_i]$ бөлік кесіндісінің ұзындығын табамыз: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,\ldots,n.$

Әрбір $[t_{i-1};t_i]$ бөлік кесіндісінен бір ξ_i нүктесін аламыз: $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Δu_i - $[t_{i-1};t_i]$ уақыт аралығында өндірілген өнім болсын.

Онда $[0;T]$ *аралығында өндірілген өнім*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i$$

қосындысына тең болады.

Егер өндірістің $f(t)$ өнімділігі $[t_{i-1};t_i]$ уақыт аралығында тұрақты және шамамен оның $f(\xi_i)$ мәніне тең деп ұйғарсақ, онда осы уақыт аралығындағы Δu_i өндіріс өнімі шамамен

$$f(\xi_i)\Delta t_i$$

көбейтіндісіне тең болады:

$$\Delta u_i \approx f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Нәтижесінде $u = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i$ өнімінің

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

жуықтауын аламыз.

Егер $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$ нөлге ұмтылса әрбір бөлік кесіндінің ұзындығы нөлге ұмтылады да, бұл жуықтаудың қатесі

$$u - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

нөлге ұмтылады, яғни

$$u = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (14)$$

болады.

Екінші жағынан, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$ қосындысы $f(t)$ функциясының $[0;T]$ аралығындағы интегралдық қосындысы болатындықтан,

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)dt \qquad (15)$$

болады. (14), (15) теңдіктерінен

$$u = \int_0^T f(t)dt \qquad (16)$$

теңдігін аламыз.

Сонымен, егер $f(t)$ – t уақыттағы еңбек өнімділігі болса, онда $\int\limits_0^T f(t)dt$ интегралы $[0;T]$ *уақыт аралығындағы өндірілген өнімнің көлемін* көрсетеді.

2) Орташа уақытты есептеу

Өндірісті игеру дәрежесіне байланысты өнімді өндіруге кететін t уақытының өзгеруін сипаттайтын функция $t = t(x)$ белгілі болсын, мұндағы x – партиядағы өнімнің реттік нөмірі. Онда x_1 *– ден* x_2 *- шіге дейінгі өнімдерді игеру кезеңінде бір өнімді жасауға жұмсалған орташа уақыт* орта мән туралы теорема (анықталған интегралдың 4 - қасиеті) бойынша есептеледі:

$$t_{op.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx. \qquad (17)$$

Өнімді өндіруге кететін уақыттың өзгеру функциясы $t = t(x)$ көбінесе келесідей болады: $t = ax^{-b}$, мұндағы a – бірінші өнімге кететін уақыт, b – өндіріс үрдісінің/ процесінің көрсеткіші.

Мысал 11: Егер уақыт шығындарының өзгеру функциясы $t(x)=600x^{-\frac{1}{2}}$ (сағ) болса, 100-шіден 225-шіге дейінгі өнімдерді игеру кезеңінде бір өнімді 0-ден өгеруге жұмсалған орташа уақыт қандай болады?

Шешімі:

$$t_{op.}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}t(x)dx$$

формуласын қоданамыз. Есептің шарты бойынша

$$x_1=100,\ x_2=225,\ t(x)=600\,x^{-\frac{1}{2}},$$

$$t_{op.}=\frac{1}{225-100}\int_{100}^{225}600x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{600}{125}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{225}=48$$ (сағ.).

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталған интегралдың қолданбаларына мысалдар келтіріңіз.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

