Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 14

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ, ҚАСИЕТТЕРІ, ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ НЕГІЗГІ ӘДІСТЕРІ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Анықталған интегралдың анықтамасы;
2. Анықталған интегралдың қасиеттері;
3. Ньютон – Лейбниц формуласы;
4. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі;
5. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау;
6. Меншіксіз интегралдар.

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ АНЫҚТАМАСЫ

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған және шектелген болсын.

$[a,b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ бөлік кесінділеріне бөлеміз. $[x_{i-1}, x_i]$ бөлік кесіндісінің ұзындығы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ санына тең болады, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ бөлік кесіндісінен бір ξ_i нүктесін аламыз: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

қосындысы $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі *интегралдық қосындысы* деп аталады.

$T = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ сандар жиынын $[a,b]$ *кесіндісінің бөліктеуі*, $Q = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ сандар жиынтығын осы *бөліктеуге сәйкес таңдама*, ал $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ санын осы *бөліктеудің диаметрі* деп атаймыз.

Анықтама 1. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып $\lambda < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір T бөліктеуі үшін $|S_n - J| < \varepsilon$ теңсіздігі T бөліктеуіне сәйкес кез келген Q таңдамасы үшін орынды болса, онда J *саны* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ *интегралдық қосындысының* λ *нөлге ұмтылғандағы шегі* деп аталады.

Интегралдық қосындысының шегі бар функция *интегралданатын функция* деп, ал интегралдық қосындының шегі, яғни $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = J$ саны $f(x)$ *функциясының* $[a,b]$ *кесіндісіндегі анықталған интегралы* деп аталады.

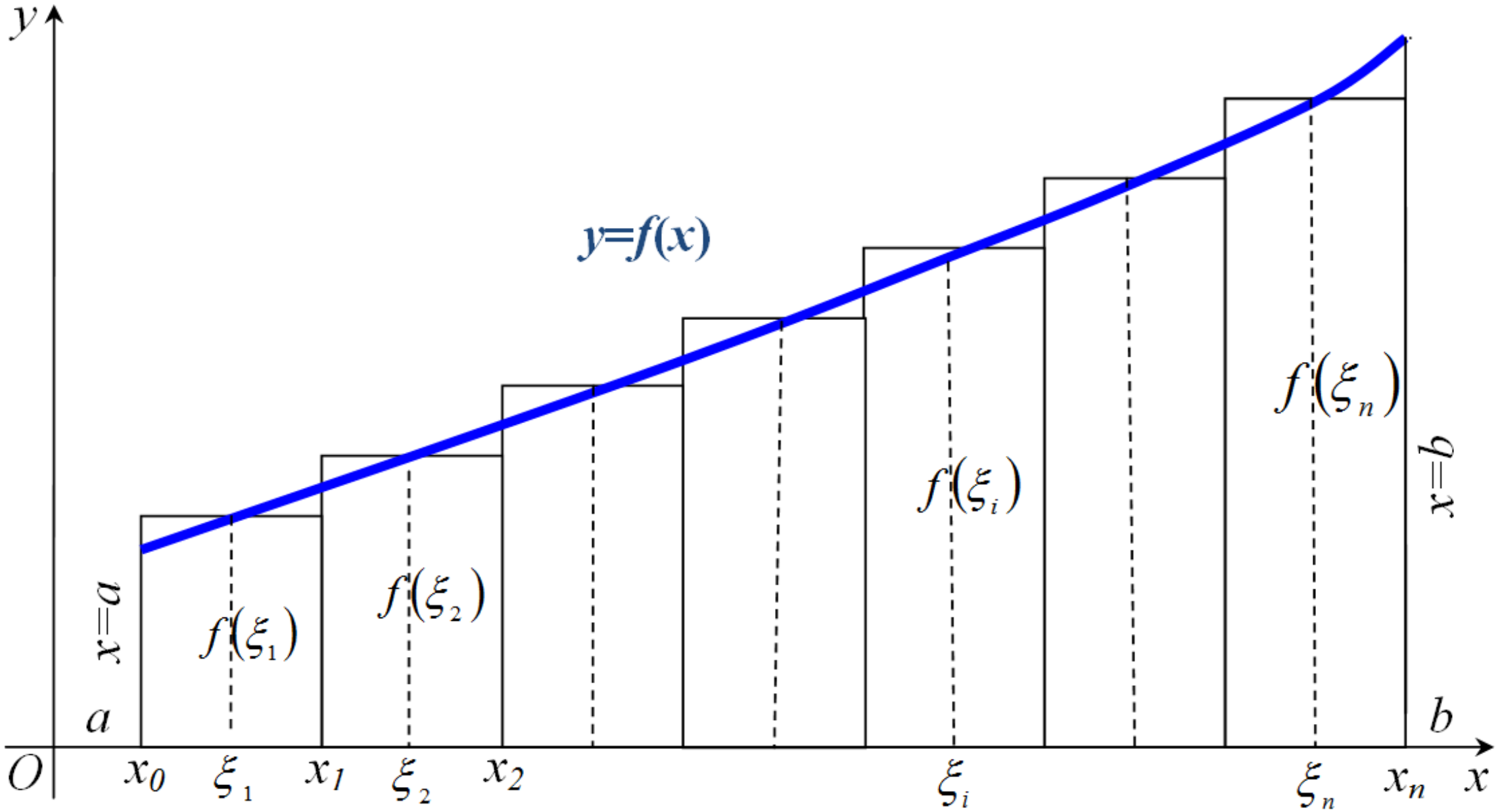
$f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ түрінде белгіленеді:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = J = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Ескерту. Үзіліссіз функция интегралданатын функция болады.

Оң мәнді $f(x)$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ бөліктеуі мен оған сәйкес $Q=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ таңдамасы бойынша құрылған $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысын *геометриялық тұрғыдан* қарастырайық:

$f(\xi_i)\Delta x_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ көбейтіндісі, геометриялық тұрғыдан табаны $[x_{i-1},x_i]$ кесіндісі, биіктігі функцияның ξ_i нүктесіндегі $f(\xi_i)$ мәніне тең болатын тік төртбұрыштың ауданын беретіндіктен, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысы төменнен OX өсімен, екі бүйірінен $x=a$, $x=b$ түзулерімен, жоғарыдан сынық сызықпен шектелген баспалдақты фигураның ауданын береді.


y
y=f(x)
x=a
x=b
a
b
O
x0
ξ1
x1
ξ2
x2
ξi
ξn
xn
x
f(ξ1)
f(ξ2)
f(ξi)
f(ξn)

Енді геометриялық тұрғыдан $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысының T бөліктеуінің $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ диаметрі нөлге ұмтылғандағы шегін қарастырайық.

$\lambda \to 0 \Rightarrow \Delta x_i \to 0 \quad (i = \overline{1,n}) \Rightarrow$ сынық сызық $y = f(x)$ қисығымен беттесуге ұмтылады $\Rightarrow$ баспалдақты фигураның ауданы қисық сызықты трапецияның ауданына ұмтылады, яғни

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S .$$

Екінші жағынан, анықталмаған интегралдың анықтамасы бойынша,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Соңғы екі теңдіктен

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

теңдігін, яғни оң $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралының төменнен OX өсімен, жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен,бүйірлерінен $x = a$ және $x = b$ түзулерімен шектелген *қисық сызықты трапецияның ауданын* беретінін аламыз.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Интегралдық қосындысы ұғымы.
2. Анықталған интегралдың анықтамасы.
3. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы.



АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. $\int_a^b C dx = C(b-a)$, C - тұрақты.
2. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда
   $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
3. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $m \le f(x) \le M$ теңсіздіктері орындалса, онда
   $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ теңсіздіктері орынды болады.
4. *Орта мән туралы теорема.*
   Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a,b]$ кесіндісінде $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай c нүктесі табылады. $f(c)$ функцияның $[a,b]$ аралығындағы *орта мәні* деп аталады.

5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

6. Егер $a < c < b$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

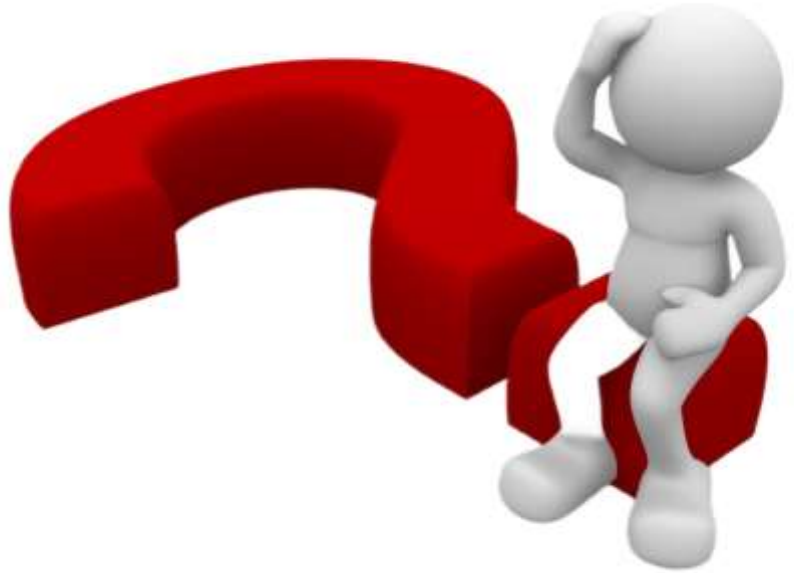
7. Егер $a < b$ болса, онда $\int_b^a f(x)dx$ интегралы деп $-\int_a^b f(x)dx$ санын айтамыз:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

8. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталған интегралдың қасиеттерін атаңыз.



НЬЮТОН – ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫ

Теорема 1 (Ньютон - Лейбниц)

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

теңдігі орынды болады. (2) *Ньютон - Лейбниц формуласы* деп аталады.

Мысал 1:

$$\int_2^4 \left(x^3+x\right)dx = \int_2^4 x^3dx + \int_2^4 xdx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4}-\frac{2^4}{4}\right)+\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right) = 64-4+8-2 = 66.$$

Мысал 2:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,\frac{\pi}{6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Мысал 3:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tgx\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = arctg\,\sqrt{3} - arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Мысал 4:

$$\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^{-2} \underbrace{d\left(x^2+1\right)}_{2xdx} = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{0^2+1}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Ньютон – Лейбниц формуласы.



АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ ӘДІСІ

Теорема 2. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha, \beta]$ аралығында бірсарынды, үзіліссіз дифференциалданатын және $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ теңдіктері орынды болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

теңдігі орынды болады. (3) *анықталған интегралда айнымалыны алмастыру формуласы* деп аталады.

Мысал 5:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left|\begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t dt \\ x_1 = 1 \Rightarrow 1 = e^t \Rightarrow t_1 = 0 \\ x_2 = e \Rightarrow e = e^t \Rightarrow t_2 = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{\ln^2 e^t}{e^t} e^t dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ескерту. $x = \varphi(t)$ ауыстыруының орнына $t = \omega(x)$ ауыстыруын енгізуге болады.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left|\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \ln 1 = 0 \\ x_2 = e \Rightarrow t_2 = \ln e = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Мысал 6:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t \\ 1+x = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ x_1 = 3 \Rightarrow t_1 = \sqrt{1+3} = 2 \\ x_2 = 8 \Rightarrow t_2 = \sqrt{1+8} = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int_2^3 \left(t^2 - 1\right)dt =$$

$$= 2\frac{t^3}{3}\Big|_2^3 - 2t\Big|_2^3 = \left(\frac{2\cdot 3^3}{3} - \frac{2\cdot 2^3}{3}\right) - 2(3-2) = \frac{32}{3}.$$

Мысал 7:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = r\sin t \\ dx = r\cos t\,dt \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \left| \begin{array}{l} 0 = r\sin t \\ 0 = \sin t \end{array} \right| = 0 \\ x_2 = r \Rightarrow t_2 = \left| \begin{array}{l} r = r\sin t \\ 1 = \sin t \end{array} \right| = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \left| \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \right| = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{r^2}{2}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{r^2\pi}{4} - 0\right) + \frac{r^2}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{r^2\pi}{4}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі.



АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДА БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ

Теорема 3. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (4)$$

теңдігі орынды болады.

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай жазамыз: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

(4) *анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады.

Мысал 8:

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx=\left|\begin{array}{l}\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu\\ u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right|=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1=$$

$$=\left(-1e^{-1}+0\right)-\left(e^{-1}-e^{0}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}.$$

Мысал 9:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot arctgx dx = \left| \begin{array}{l} \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \\ u = arctgx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}x\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{(\sqrt{3})^2}{2} arctg\sqrt{3} - 0\right) - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 0) + \frac{1}{2}(arctg\sqrt{3} - arctg0) =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау.



МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

Анықталған интеграл ұғымы сегментте (яғни шектелген тұйық аралықта) анықталған және шектелген функцияға тән ұғым.

Біздің ендігі мақсатымыз интеграл ұғымын шектеусіз аралықта берілген немесе шектеулі аралықта берілген, бірақ бұл аралықта шектелмеген функция үшін енгізу.

1. Шексіз шекті интегралдар

$f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында анықталған және осы аралықтың кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын функция болсын.

Анықтама 2. $f(x)$ функциясының $[a,+\infty)$ аралығындағы *меншіксіз интегралы* деп $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ шегін айтамыз да $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ түрінде белгілейміз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

(5) теңдігіндегі шек сан болса, онда *меншіксіз интеграл жинақты*, кері жағдайда, яғни шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

Осылайша, меншіксіз интеграл $(-\infty, b]$ аралығында анықталған және кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын $f(x)$ функциясы үшін

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (6)$$

теңдігімен анықталады да, шек сан болса *жинақты*, шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

$(-\infty, +\infty)$ аралығында анықталған және кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын $f(x)$ функциясы үшін меншіксіз интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx, \qquad (7)$$

(с – кез келген сан) теңдігімен екі меншіксіз интегралдың қосындысы ретінде анықталады.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы тек теңдіктің оң жағындағы *меншіксіз интегралдардың екеуі де жинақты*, яғни соңғы теңдіктің оң жағындағы екі шек те ақырлы болғанда (сан болғанда) ғана *жинақты* болады.

Мысал 10: $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{2}e^{-x^2}2xdx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{-b^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақты және $\frac{1}{2}$ санына тең.

Мысал 11: $\int_0^{+\infty} xe^{x^2}dx$ меншіксіз интегралын есептеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$\int_0^{+\infty} xe^{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{2}e^{x^2}2xdx = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{x^2}\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{b^2}-e^0\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty} e^{b^2}-1\right) = +\infty.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақсыз.

Мысал 12: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$ функциясы, $x^2+4x+5\neq 0$ болғандықтан (себебі $D=16-4\cdot 5=-4<0$), $(-\infty,+\infty)$ аралығында үзіліссіз. Олай болса ол кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданады.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+5}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}arctg(x+2)\Big|_{a}^{0}++\lim_{b\to+\infty}arctg(x+2)\Big|_{0}^{b}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}arctg2-\lim_{a\to-\infty}arctg(a+2)+\lim_{b\to+\infty}arctg(b+2)-\lim_{b\to+\infty}arctg2=$$

$$=arctg2-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-arctg2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақты және π санына тең.

2. Шектелмеген функцияның интегралдары

$f(x)$ функциясы $(a,b]$ аралығында анықталған, осы аралықтың кез келген $[c,b]$ ішкі кесіндісінде интегралданатын және оның $x=a$ нүктесіндегі оң жақты шегі шексіздікке тең немесе жоқ функция болсын.

Анықтама 3. $f(x)$ функциясының $(a,b]$ аралығындағы меншіксіз интегралы деп $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, (\varepsilon>0, a+\varepsilon<b)$ шегін айтамыз да $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ түрінде белгілейміз:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, (\varepsilon>0) \qquad (8)$$

(8) теңдігінің оң жағындағы шек сан болса, онда $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ меншіксіз интегралы *жинақты*, ал шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

Мысал 13: $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ функциясы кез келген $[1+\varepsilon;e]$ сегментінде үзіліссіз, яғни интегралданады және оның $x=1$ нүктесіндегі оң жақты шегі шексіздікке тең. Олай болса берілген интеграл меншіксіз және

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^e\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right]=\frac{3}{2}.$$

Демек, $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ меншіксіз интегралы жинақты және $\frac{3}{2}$ санына тең.

Сол сияқты, $[a;b)$ аралығында анықталған, осы аралықтың кез келген $[a,c]$ ішкі кесіндісінде интегралданатын және $x=b$ нүктесіндегі сол жақты шегі шексіздікке тең немесе жоқ $f(x)$ функциясы үшін меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, (\varepsilon > 0) \qquad (9)$$

теңдігімен анықталады.

(9) теңдігінің оң жағындағы шек сан болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралы *жинақты*, ал шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

Мысал 14: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ меншіксіз интегралын есептеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ функциясы кез келген $\left[0;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ сегментінде үзіліссіз, яғни интегралданады және оның $x=\frac{\pi}{2}$ нүктесіндегі сол жақты шегі шексіздікке тең. Олай болса берілген интеграл меншіксіз және

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\infty.$$

Демек, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ меншіксіз интегралы жинақсыз.

$[a,c)\cup(c,b]$ жиынында анықталған, осы жиынның кез келген $[d,e]$ ішкі кесіндісінде интегралданатын $x=c$ нүктесіндегі біржақты шектерінің тым болмаса біреуі шексіздікке тең немесе жоқ $f(x)$ функциясы үшін меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx,\ (\varepsilon>0) \qquad (10)$$

теңдігімен анықталады.

Егер (10) теңдігінің оң жағындағы екі шек те сан болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралы *жинақты*, ал егер олардың тым болмаса біреуі шексіздік немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

Мысал 15: $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ меншіксіз интегралын есептеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

Интеграл астындағы функция $[0;1)\cup(1;2]$ жиынында үзіліссіз, яғни осы жиынның кез келген $[d;e]$ сегментінде интегралданады және оның $x=1$ нүктесіндегі шегі шексіздікке тең. Олай болса берілген интеграл меншіксіз және

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4x+3} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2-4x+3},\ \varepsilon>0$$

теңдігімен анықталады. Теңдіктің оң жағындағы шектерді қарастырамыз

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2-1}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}-\ln 3\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}=\infty.$$

Демек, $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ меншіксіз интегралы жинақсыз.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Шексіз шекті интегралдар.
2. Шектелмеген функцияның интегралдары.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

