Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 13

РАЦИОНАЛ, ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Рационал өрнектердің интегралдануы;
2. Тригонометриялық өрнектердің интегралдануы;
3. Иррационал өрнектердің интегралдануы.

РАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ

Рационал функциялар *бүтін-рационал* және *бөлшек-рационал* болып екі түрге бөлінеді.

Бүтін-рационал функция деп көпмүшелікті айтамыз.

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

n дәрежелі көпмүшелік - бүтін-рационал функция, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ - тұрақты коэффициенттер.

Бөлшек-рационал функция деп көпмүшеліктердің қатынасы түрінде берілген функцияны айтамыз.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

бөлшек-рационал функция.

Егер $(n < m)(n \geq m)$, яғни алымының дәрежесі бөлімінің дәрежесінен кіші (кіші емес) болса, онда $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшегі *дұрыс (бұрыс) бөлшек* деп аталады.

Бұрыс бөлшекті, оның алымындағы көпмүшелікті бөліміндегі көпмүшелікке бөлу арқылы, көпмүшелікке немесе көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына түрлендіруге болады. Сондықтан біз тек дұрыс бөлшектің интегралын қарастырамыз.

Рационал бөлшектердің қарапайым интегралдары

Рационал бөлшектердің қарапайым интегралдарына

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, \quad M \neq 0, k = 1,2,\ldots,$$

интегралдары жатады.

Енді осы интегралдарды қарастырайық.

1. $\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$

1.1 $k = 1$ жағдайы

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C. \qquad (1)$$

Мысал 1: $\int \frac{dx}{x-5}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{\overbrace{d(x-5)}^{dx}}{x-5} = \ln|x-5| + C.$

1.2 $k = 2,3,\ldots \ (k \geq 2)$ жағдайы

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{-1}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c\,. \qquad (2)$$

Мысал 2: $\int \frac{dx}{(x+4)^6}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{dx}{(x+4)^6} = \int (x+4)^{-6} dx = \int (x+4)^{-6} \overbrace{d(x+4)}^{dx} = \frac{(x+4)^{-6+1}}{-6+1} + C = -\frac{1}{5(7x+4)^5} + C.$

2. $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad k=1,2,\ldots, \quad D=p^2-4q<0$

2.1 $k=1$ жағдайы

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ интегралын, x^2+px+q үшмүшелігінде толық квадратты бөліп шығару арқылы

$$\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C, \quad \int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C, \quad \int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C$$

интегралдарының біріне келтіруге болады.

x^2+px+q үшмүшелігінде толық квадратты бөліп шығарамыз:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{D}{4},$$

мұндағы $D=p^2-4q$ - квадрат үшмүшеліктің дискриминанты.

а) $D>0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{D}{4}}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2} \qquad (3)$$

бұл $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$ түріндегі интеграл: $u=x+\frac{p}{2}, \quad a=\frac{\sqrt{D}}{2}.$

Мысал 3: $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-1}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-1^2}=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{(x+2)-1}{(x+2)+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C.$$

b) $D=0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

бұл $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$ түріндегі интеграл: $u = x + \frac{p}{2}$.

Мысал 4: $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2} + C.$

c) $D<0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{D}{4}}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)^2} \qquad (5)$$

бұл $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ түріндегі интеграл: $u=x+\frac{p}{2}, \quad a=\frac{\sqrt{-D}}{2}.$

Мысал 5: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}=\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+9}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=$$

$$=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\ \frac{x+2}{3}+C.$$

2.2 $k = 2,3,\ldots$ жағдайы

а) $D > 0$ жағдайы.

$\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^k}$ интегралы

$$\int \frac{dx}{\left(u^2 - a^2\right)^k} = \frac{1}{2a^2(k-1)} \cdot \frac{u}{\left(u^2 - a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-1}{2a^2(k-1)} \int \frac{dx}{\left(u^2 - a^2\right)^{k-1}} \qquad (6)$$

рекуренттік формуласы мен (3) интегралы арқылы табылады:

$$u = x + \frac{p}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{D}}{2}.$$

Мысал 6: $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 4x + 3\right)^2}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+3\right)^2} = \int \frac{dx}{\left((x+2)^2 - 1\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot 1^2 (2-1)} \cdot \frac{x+2}{\left((x+2)^2 - 1\right)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 1^2 (2-1)} \int \frac{dx}{\left((x+2)^2 - 1\right)^{2-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{\left(x^2+4x+3\right)} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C.$$

b) $D=0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^{2k}}=\frac{-2k}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^{2k+1}}+C \qquad (7)$$

Мысал 7: $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)^3}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)^3}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^{2\cdot 3}}=\int (x+2)^{-6}d(x+2)=-\frac{5}{(x+2)^5}+C.$

c) $D<0$ жағдайы.

$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ интегралы

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{1}{2a^2(k-1)} \frac{u}{(u^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}$$

рекуренттік формуласы мен (5) интегралы арқылы табылады:

$$u = x + \frac{p}{2}; \; a = \frac{\sqrt{-D}}{2}.$$

Мысал 8: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} = \int \frac{dx}{((x^2+4x+4)+9)^2} = \int \frac{dx}{((x+2)^2+3^2)^2} = \frac{1}{2\cdot 3^2(2-1)} \cdot \frac{x+2}{(x+2)^2+3^2} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 3^2(2-1)} \int \frac{d(x+2)}{((x+2)^2+3^2)^{2-1}} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{x+2}{(x+2)^2+3^2} + \frac{1}{18} \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{x+2}{(x+2)^2+3^2} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{x+2}{3} + C.$$

3. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, \quad k=1,2,3,\ldots \quad M\neq 0.$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(x^2+px+q)' + \left(N-\frac{pM}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(N-\frac{pM}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

Соңғы екі интеграл жоғарыда қарастырылған сәйкесінше 1.1 және 2 түріндегі интегралдар болады.

Мысал 9: $\int \frac{x+2}{x^2+4x+13}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+4x+13)' + \left(2-\frac{4\cdot 1}{2}\right)}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{(x+2)}{x^2+4x+13}dx =$$

$$= \int \frac{x+2}{(x+2)^2+3^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left((x+2)^2+3^2\right)}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{2}\ln\left|(x+2)^2+3^2\right| + C.$$

Дұрыс рационал бөлшектің интегралы

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дұрыс бөлшегінің интегралын, $Q_m(x)$ көпмүшелігін $(x-a)$ (a - көпмүшеліктің түбірі) түріндегі екімүшеліктер мен x^2+px+q түріндегі дискриминанты теріс квадрат үшмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктелуін пайдалана отырып,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, \quad M \neq 0, k = 1,2,\ldots,$$

түрлеріндегі қарапайым интегралдарының қосындысына түрлендіру арқылы интегралдауға болады. Мысалмен қарастырамыз.

Мысал 10: $\int \frac{xdx}{x^3-x^2+x-1}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{xdx}{x^3-x^2+x-1} = \int \frac{x}{x^2(x-1)+(x-1)}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow (x^2+1)(x-1) \neq 0$$

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)$$

$$x = (A+C)x^2 + (-A+B)x + (-B+C)$$

$$0x^2 + 1x + 0 = (A+C)x^2 + (-A+B)x + (-B+C)$$

$$x^2: \quad 0 = A+C$$

$$x: \quad 1 = -A+B$$

$$x^0: \quad 0 = -B+C$$

Бірінші теңдіктің өзін жазып, соңғы екі теңдікті қосамыз: $\begin{matrix} 0 = A+C \\ 1 = -A+C \end{matrix}$

Теңдіктерді қосамыз: $2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

$C = \frac{1}{2}$ мәнін теңдеулерге қоя отырып $A = -\frac{1}{2}$, ал $B = \frac{1}{2}$ болатынын аламыз.

$$\int \frac{xdx}{x^3-x^2+x-1} = \int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \right) dx = \int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}arctg\ x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Бүтін-рационал функция ұғымы.
2. Бөлшек-рационал функция ұғымы.
3. Дұрыс (бұрыс) бөлшектер ұғымы.
4. Рационал бөлшектердің қарапайым интегралдары.
5. Дұрыс рационал бөлшектің интегралы.



ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ

1. $\int \sin px \cos qx dx$; $\int \cos px \cos qx dx$; $\int \sin px \sin qx dx$ интегралдары $p \neq q$ жағдайында

$$\sin px \cos qx = \frac{1}{2}[\sin(p-q)x + \sin(p+q)x]$$

$$\cos px \cos qx = \frac{1}{2}[\cos(p-q)x + \cos(p+q)x]$$

$$\sin px \sin qx = \frac{1}{2}[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x]$$

түрлендірулерін қолдану арқылы табылады.

Мысал 11: $\int \sin 3x \sin 5x dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

2. $\int \sin^m px \cos^n px dx$ түріндегі интегралдарды:

m - тақ болса,

$$\sin^2 px = 1 - \cos^2 px, \quad \cos px = z, \quad \sin px dx = -\frac{1}{p} dz$$ ауыстыруларын;

n - тақ болса,

$$\cos^2 px = 1 - \sin^2 px, \quad \sin px = z, \quad \cos px dx = \frac{1}{p} dz$$ ауыстыруларын;

m де, n де жұп болса,

$$\sin px \cos px = \frac{1}{2} \sin 2px,$$

$$\cos^2 px = \frac{1 + \cos 2px}{2},$$

$$\sin^2 px = \frac{1 - \cos 2px}{2}$$

дәреже төмендету формулаларын қолдану арқылы табуға болады.

Мысал 12: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $m = 2, n = 2.$ m де, n де жұп жағдайы.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{4} dx = \int \frac{(1-\cos^2 2x)}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C.$$

3. $R(u,v)$ түрінде u,v айнымалыларына қарағанда рационал, яғни u мен v айнымалыларына тек арифметикалық амалдарды қолдану арқылы алынған өрнекті белгілейміз.

$\int R(\sin x,\cos x)dx$ интегралы $t=tg\frac{x}{2}$ универсал ауыстыруын енгізу арқылы t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады:

$$t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\Rightarrow$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$

мұндағы $\mathrm{R_1(t)}$ - t айнымалысы бойынша рационал функция.

Мысал 13: $\int\frac{dx}{\sin x}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

4. *Кейбір дербес жағдайлар.*

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын, егер:

а) Егер $R(sin\ x, -cos\ x) \equiv -R(sin\ x, cos\ x)$ болса, онда $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын $\sin x = t$ ауыстыруын енгізу арқылы t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады.

Мысал 14: $\int \cos^3 x dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R(\sin x, \cos x) = \cos^3 x$

$$R(\sin x, -\cos x) = (-\cos x)^3 = -\cos^3 x = R(\sin x, \cos x)$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (1 - t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

b) $R(-\sin x, \cos t) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда $\cos x = t$ ауыстыруын енгізу арқылы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады.

c) Егер $R(-\sin x,-\cos x)\equiv R(\sin x,\cos x)$ болса, онда $tgx=t$, ауыстыруын енгізу арқылы $\int R(\sin x,\cos x)dx$ интегралын t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады.

Мысал 15: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{-\sin x}{(-\cos x)^3}=\frac{\sin x}{\cos^3 x}=R(\sin x,\cos x)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=\int \frac{\sin x}{\cos x\cos^2 x}dx=\int tgx\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left|tgx=t,\ \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt\right|=$$

$$=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{tg^2x}{2}+C.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Тригонометриялық өрнектердің түрлері және интегралын есептеудегі ауыстыруларды атаңыз.



ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ

Иррационал өрнектердің интегралдарын табудың негізгі жолы оларды айнымалыны ауыстыру арқылы рационал өрнектің интегралына түрлендіру болып табылады. Біз кейбір иррационал өрнектердің интегралдар мен оларға сәйкес ауыстыруларды келтіреміз.

а) Бөлшек-сызықтық иррационалдықты интегралдау.

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Мысал 16: $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \sqrt[4]{x}, m=4, \frac{ax+b}{cx+d} = x.$

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x = t^4, & dx = 4t^3dt, \\ x^{\frac{1}{2}} = \left(t^4\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x} = t^2 & \\ x^{\frac{1}{4}} = \left(t^4\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = t & \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt =$$

$$= 4\int \frac{(1+t)t^3}{t^2\left(t^2+1\right)}dt = 4\int \frac{\left(t+t^2\right)}{t^2+1}dt = 4\int \frac{\left(t^2+1\right)+(t-1)}{t^2+1}dt$$

$$= 4\int \left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 4t+2\ln(t^2+1)-4arctgt+C = \left|t=\sqrt[4]{x}\right|$$

$$= 4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4arctg\sqrt[4]{x}+C.$$

b) Эйлер ауыстырулары

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$$

Ауыстырулар:

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, егер $a > 0$;

$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm c$, егер $c > 0$;

$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_0)t$, егер $D = b^2 - 4ac > 0$ болса, мұндағы x_0 саны ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігінің түбірі.

c) $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad x-x_0=\frac{1}{t}$

$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx, \quad x=a\sin t$ немесе $x=a\cos t;$

$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx, \quad x=atgt$ немесе $x=actgt$.

Мысал 17: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{Ax+B}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = \frac{1x+0}{(x-0)\sqrt{x^2-2x-1}},\ x_0=0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = \left| \begin{array}{l} x-0=\frac{1}{t} \Rightarrow x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ \sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-2\frac{1}{t}-1}=\sqrt{\frac{1-2t-t^2}{t^2}}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-t^2}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{-(t+1)^2+2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(t+1)^2}} = -\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C = -\arcsin\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2x}}+C.$$

Мысал 18: $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)=\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}.$

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\left|x=2\sin t,\ dx=2\cos t dt\right|=\int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos t dt=\int \frac{\sqrt{\left(2^2\left(1-\sin^2 t\right)\right)^3}}{32\sin^6 t}\cos t dt=$$

$$=\frac{8}{32}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{4}\int ctg^4 t dctgt=-\frac{1}{20}ctg^5 t+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\sin t\\ cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\frac{x^2}{4}\\ cost=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\end{array}\right|=C-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Иррационал өрнектердің түрлері және интегралын есептеудегі ауыстыруларды атаңыз.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

