Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 12

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл ұғымы;
2. Анықталмаған интегралдың қасиеттері;
3. Негізгі интегралдар кестесі;
4. Интегралдаудың негізгі әдістері;
5. Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау;
6. Бөліктеп интегралдау әдісі.

АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ ҰҒЫМЫ

Дифференциалдау амалы: функция берілген, туындысын табу керек.

Интегралдау амалы: функцияның туындысы берілген, функцияның өзін табу керек (функцияның туынды тапқанға дейінгі түрін – алғашқы түрін табу керек).

Интегралдау – дифференциалдауға кері амал.

Анықтама 1. Егер жиында $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x)$ функциясы берілген жиында $f(x)$ *функциясының алғашқы функциясы* деп аталады.

Анықтамалардан келесі *тұжырымдар* шығады:

1. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $(F'(x)=f(x))$ және C – тұрақты сан

$\Rightarrow \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x)+C$ – $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы.

Қорытынды: егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда кез келген C тұрақтысы үшін $F(x)+C$ функциясы да алғашқы функция болады.

2. $F(x)$ және $Q(x)$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциялары болсын $F'(x)=f(x)$ және

$Q(x)=f(x)) \Rightarrow \left(Q(x)-F(x)\right)' = f(x)-f(x)=0 \Rightarrow Q(x)-F(x)=C$ - тұрақты сан $\Rightarrow Q(x)=F(x)+C$.

Қорытынды: Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда оның кез келген алғашқы функциясы $F(x)+C$ түрінде жазылады.

1, 2 тұжырымдарынан, егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x)+C$ оның барлық алғашқы функцияларының жалпы түрі болатыны шығады.

Анықтама 2. $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының $F(x)+C$ жалпы түрін $f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп атаймыз да $\int f(x)dx$ түрінде белгілейміз.

$\int f(x)dx = F(x)+C$, мұндағы $F(x)$: $F'(x) = f(x)$.

Мысал 1: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$,

$f(x)=\cos x,\quad F(x)=\sin x,\quad F'(x)=(\sin x)' = \cos x = f(x),\quad F(x)+C=\sin x+C.$

$f(x)$ функциясы *интеграл астындағы функция*,

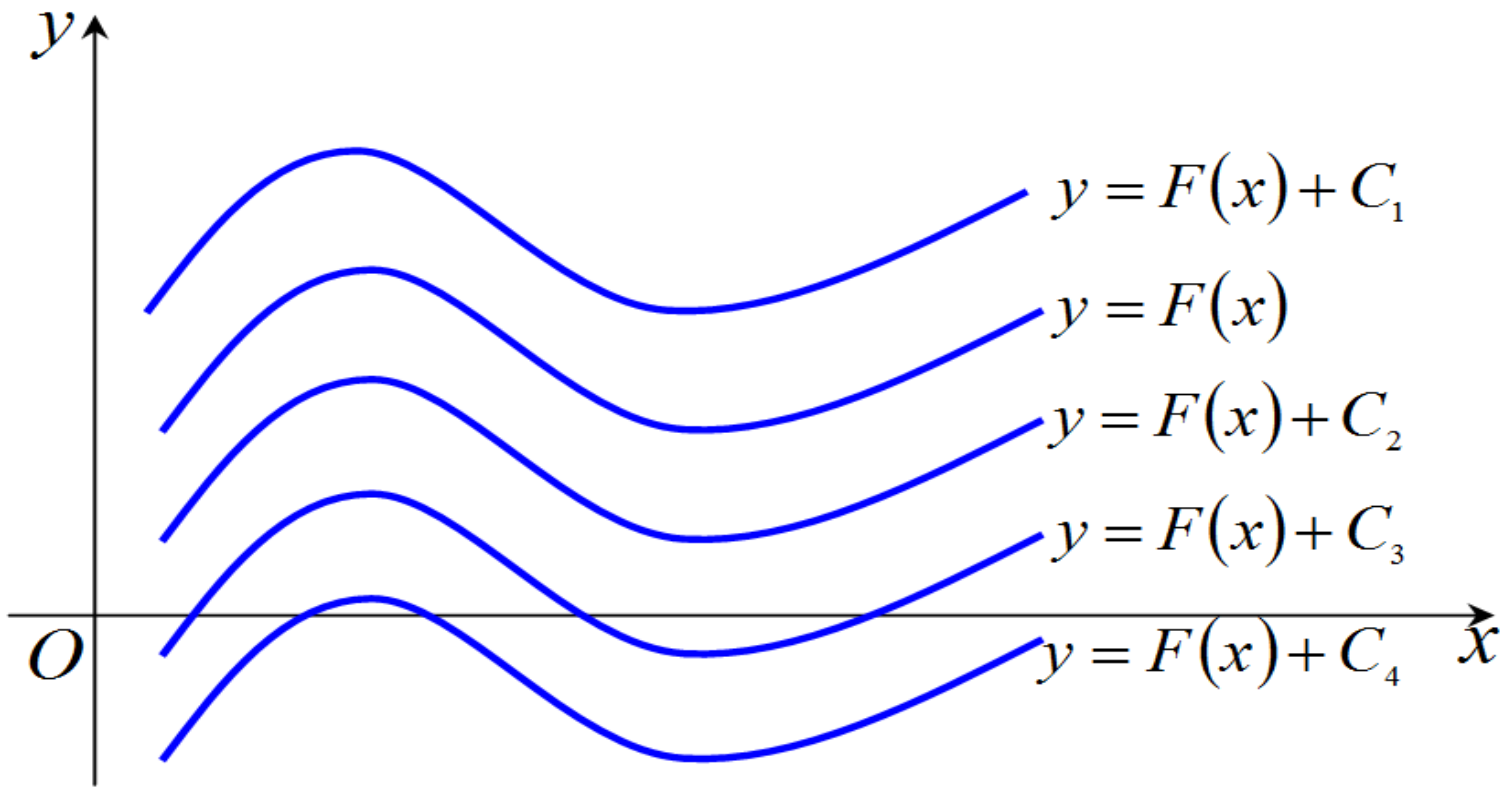
$f(x)dx$ - *интеграл астындағы өрнек*,

x - *интегралдау айнымалысы* (dx бойынша анықталады),

$\int$ - *анықталмаған интеграл белгісі* деп аталады.

Функцияның анықталмаған интегралын табу амалы осы функцияны *интегралдау* деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, анықталмаған интеграл $y = F(x) + C$ *қисықтарының жиынтығы* (әрбір С-ның сандық мәніне анықталған қисықтар жиынтығы сәйкес келеді) (сурет 1). Әрбір алғашқы функцияның (қисықтың) графигі *интегралдық қисық* деп аталады.



Сурет 1

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Дифференциалдау және интегралдау амалдары.
2. Алғашқы функция ұғымы.
3. Анықталмаған интегралдың анықтамасы.
4. Анықталмаған интегралдың геометриялық мағынасы.



АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең, ал анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Функцияның дифференциалының анықталмаған интегралы осы функция мен кез келген тұрақты санның қосындысына тең:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға болады:

$$\int a f(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0$$ - тұрақты сан.

4. Қосындының анықталмаған интегралы қосылғыштардың интегралдарының қосындысына тең:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда кез келген үзіліссіз туындысы бар $u = \varphi(x)$ функциясы үшін $\int f(u)du = F(u) + C$ болады. Соңғы қасиет анықталмаған интегралдың интегралдау айнымалысына қарағанда инвариантттылығын көрсетеді.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталмаған интегралдың қасиеттерін атаңыз.



НЕГІЗГІ ИНТЕГРАЛДАР КЕСТЕСІ

Дифференциалдық есептеулердің негізгі формулаларынан шығатын интегралдар кестесін қарастырамыз:

1.	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + c\right)$	13.	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + c$
2.	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	14.	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c$
3.	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$	15.	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + c$
4.	$\int e^u du = e^u + c$	16.	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$
5.	$\int \sin u\, du = -\cos u + c$	17.	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\rvert + c$
6.	$\int \cos u\, du = \sin u + c$	18.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\ \frac{u}{a} + c$
7.	$\int tg\, u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$	19.	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{u}{a} + c$
8.	$\int ctg u du = \ln\lvert\sin u\rvert + c$	20.	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{a+u}{a-u}\right\rvert + c$
9.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c$	21.	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + c$
10.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg u + c$	22.	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\ \frac{u}{a} + c$
11.	$\int sh\, u du = ch\, u + c$	23.	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c$
12.	$\int ch\, u du = sh\, u + c$	24.	

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Негізгі интегралдар кестесі және оның қолданбалары.



ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ НЕГІЗГІ ӘДІСТЕРІ

Қарапайым әдістер деп интеграл астындағы өрнектерге (функцияларға) тепе-тең түрлендірулер жасау арқылы немесе анықталған интегралдың қасиеттерін қолдану арқылы кестелік интегралға келтіру әдістерін айтамыз.

Мысал 2:

a) Интегралдың 3, 4 - қасиеттерін пайдаланып берілген интегралды табуды 4 және 5 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \left(7\sin x + 5e^x\right)dx = 7\int \sin x dx + 5\int e^x dx = -7\cos x + 5e^x + C;$$

b) Интегралдың 3, 4 - қасиеттерін пайдаланып берілген интегралды табуды 2, 18 және 19 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int\left[\frac{3}{16+x^2} - \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{16}{x}\right]dx = 3\int\frac{dx}{16+x^2} - 5\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} + 16\int\frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{1}{4}arctg\,\frac{x}{4} - 5\arcsin\frac{x}{3} + 16\ln|x| + C;$$

c) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 1 түріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{5xdx}{\sqrt{x}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \int x^2 x^{-\frac{1}{2}}dx + 5\int x x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{5x}{3} - 1\right) + C;$$

d) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 1 және 2 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \frac{(x-2)(x^3+7)}{x^4}dx = \int \frac{x^4-2x^3+7x-14}{x^4}dx = \int \left(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}-\frac{14}{x^4}\right)dx =$$

$$= \int dx - 2\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-3}dx - 14\int x^{-4}dx = x - 2\ln|x| - \frac{7}{2x^2} + \frac{14}{3x^3} + C;$$

e) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 1 және 19 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2dx}{x^2(1+x^2)} =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C;$$

f) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 3 және 10 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx=\int a^x dx+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{a^x}{\ln a}-ctgx+C$$

g) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 9 және 10 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C.$$

Интегралды оның сыртқы түрінің *инварианттылығын*, яғни

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

қолданып табу.

Мысал 3:

a) $$\int \sin x\, d(\sin x) = \left| \int u^{\alpha}\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

b) $$\int e^{-x^2} x\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} \underbrace{d(-x^2)}_{-2x\,dx} = \left| \int e^{u}\,du = e^{u} + C \right| = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C;$$

c) $$\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\overbrace{d(\cos x)}^{-\sin x\,dx}}{\cos x} = \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right| = -\ln|\cos x| + C;$$

d) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{d\left(x^3\right)}^{3x^2dx}}{\sqrt{1-(x^3)^2}} =$$

$$= \left| \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C \right| = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C;$$

e) $$\int \frac{dx}{(2+3x)^5} = \frac{1}{3}\int (2+3x)^{-5}\underbrace{d(2+3x)}_{3dx} = \left| \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(2+3x)^{-4}}{(-4)} + C = -\frac{1}{12(2+3x)^4} + C;$$

f) $$\int \frac{dx}{3-8x} = -\frac{1}{8}\int \frac{\overbrace{d(3-8x)}^{-8dx}}{3-8x} = \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right| = -\frac{1}{8}\ln|3-8x| + C.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Интегралды тікелей есептеу.
2. Инварианттылық формуласы көмегімен интегралды есептеу.



АЙНЫМАЛЫНЫ АУЫСТЫРУ ӘДІСІН ҚОЛДАНЫП ИНТЕГРАЛДАУ

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау интегралға жаңа айнымалы енгізуге негізделген. Жаңа айнымалы енгізу негізінде берілген интеграл жаңа интегралға, яғни, кестелік немесе кестелік интегралға келтірілетін интегралға көшеді.

$\int f(x)dx$ интегралын табу қажет болсын. $x=\varphi(t)$ жаңа айнымалысын енгіземіз, мұндағы $\varphi(t)$ - үзіліссіз туындысы бар функция. Онда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Rightarrow$$

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

теңдігін аламыз. Бұл формула *анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы* деп аталады. Оң жақтағы интегралды тапқаннан кейін t айнымалысынан қайта x айнымалысына көшеміз.

Мысал 4: Айнымалыны ауыстыру формуласы көмегімен интегралды есептеу:

a) $$\int \sin x d(\sin x) = \left| \begin{array}{l} \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\ t = \sin x \end{array} \right| \overset{(1)}{=} \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

b) $$\int e^{-x^2} x dx = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = -x^2 \\ dt = -2xdx \\ -\frac{dt}{2} = xdx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t dt \overset{(4)}{=} -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C;$$

c) $$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} \overset{(2)}{=} -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

d) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\ t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ \dfrac{dt}{3} = x^2 dx \end{array} \right| \overset{(18)}{=} \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\ t + C = \frac{1}{3}\arcsin\ x^3 + C.$$

e) $$\int \frac{dx}{(2+3x)^5} = \left| \begin{array}{l} \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\ t = 2+3x \\ dt = 3\,dx \\ \dfrac{dt}{3} = dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int t^{-5} dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\frac{t^{-4}}{(-4)} + C =$$

$$= -\frac{1}{12t^4} + C = -\frac{1}{12(2+3x)^4} + C;$$

f) $$\int \frac{dx}{3-8x} = \left| \begin{array}{l} \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\ t = 3-8x \\ dt = -8dx \\ -\frac{dt}{8} = dx \end{array} \right| -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{8}\ln t = -\frac{1}{8}\ln|3-8x| + C.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру.



БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ ӘДІСІ

$u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялары үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv)=udv+vdu$. Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu$$

немесе

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (2)$$

теңдігін аламыз.

Бұл формула *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданғанда интеграл астындағы өрнекті udv көбейтіндісі ретінде қарастырамыз да u функциясын $\int vdu$ интегралы $\int udv$ интегралына қарағанда интегралдауға қолайлы болатындай етіп таңдап аламыз.

a) $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$ түріндегі интегралдар-да, мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, $u = P(x)$ деп, ал dv ретінде интеграл астындағы қалған көбейткіштерді алу керек.

b) $\int P(x)\arcsin\ xdx, \int P(x)\arccos\ xdx, \int P(x)\ln xdx, \int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$ түріндегі интегралдарда $P(x)\,dx = dv$ деп, ал u ретінде интеграл астындағы қалған көбейткішті алу керек.

c) $\int e^{ax}\sin bx\,dx, \int e^{ax}\cos bx\,dx$ түріндегі интегралдар бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолдану арқылы интегралдау есебін осы интегралға қатысты сызықтық теңдеуді шешу есебіне келтіру арқылы табылады. Бұл арада бірінші ретте u функциясы ретінде көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынса, екінші ретте де көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынуы керек.

Мысал 5: Бөліктеп интегралдау формуласы көмегімен интегралды есептеу:

a) $$\int (2x+1)e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = (2x+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,2dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C;$$

b) $$\int x\cos 3xdx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x,\ du = dx, \\ dv = \cos 3xdx,\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx =$$

$$= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C;$$

c) $$\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \arccos x \Rightarrow du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{d(1-x^2)}_{-2xdx} = x\arccos x - \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$$

d) $$\int x\ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C;$$

е) $$\int e^{2x}\sin 3x dx = \left|\begin{array}{l}\int u dv = uv - \int v du \\ u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right| = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx = \left|\begin{array}{l}\int u dv = uv - \int v du \\ u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3x dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx\right) + C.$$

Нәтижесінде $\int e^{2x}\sin 3x dx$ белгісізіне қатысты келесі сызықтық теңдеуді алдық. Бұдан сызықтық теңдеуді шешу есебіне келеміз:

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx + C$$

Теңдеуді шеше отырып $\int e^{2x}\sin 3x dx$ белгісізін табамыз:

$$\int e^{2x}\sin 3x dx + \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x + C \Rightarrow$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x + C \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x + C\right) \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{13}e^{2x}\left(-3\cos 3x + 2\sin 3x + C\right).$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Анықталмаған интегралда бөліктеп интегралдау әдісі.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

