Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 11

БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Функцияның дифференциалы;
2. Күрделі функцияның дифференциалы;
3. Функцияның жоғарғы ретті дифференциалы;
4. Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуы;
5. Дифференциалданатын функция туралы теоремалар;
6. Функцияны зерттеу;
7. Туындының экономикада қолданылуы.

ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Анықтама 1. $y=f(x)$ *дифференциалданатын функциясының* x *нүктесіндегі дифференциалы* деп оның осы нүктедегі туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісін айтамыз да $\mathrm{d}y$ немесе $\mathrm{d}f(x)$ түрінде белгілейміз:

$$dy = y'\Delta x;\ df(x) = f'(x)\Delta x\ . \qquad (1)$$

Мысал 1:

$$y = x^3 \Rightarrow dy = y'\Delta x = 3x^2\Delta x,$$

$$y = \sin x \Rightarrow d(\sin x) = (\sin x)'\Delta x = \cos x \cdot \Delta x.$$

(1) теңдігінен

$$dx = (x)' \Delta x = \Delta x , \qquad (2)$$

яғни аргументтің дифференциалы өзінің өсімшесіне тең екендігі шығады.

$$(1),\ (2) \Rightarrow dy = y'dx \Rightarrow \qquad (3)$$

функцияның дифференциалы оның туындысы мен аргументтің дифференциалының көбейтіндісіне тең.

$(3) \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$ - *функцияның туындысы функция дифференциалының аргумент дифференциалына қатынасына тең*.

Функцияның дифференциалы мен өсімшесінің арасындағы байланысты қарастырайық.

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ теңдігінен (туындының анықтамасынан) шексіз аз шаманың қасиеті бойынша

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha(\Delta x) \qquad (4)$$

шамасының $\Delta x\to 0$ жағдайында шексіз аз шама болатыны шығады. Соңғы теңдіктен Δy функция өсімшесін өрнектейміз:

$$(4)\Rightarrow \Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\,.$$

Бұл теңдіктен функцияның дифференциалы $f'(x)\Delta x$ дегеніміздің Δy өсімшесінің Δx аргумент өсімшесіне қарағандағы сызықтық бөлігі екендігі шығады.

Дифференциалдау ережелері:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(c \cdot v) = cdv$;
3. $d(u \cdot v) = udv + vdu$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Мысал 2: $dy = d(arctgx) = (arctgx)' \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2}$.

Мысал 3: $dy = d\left(e^{x^2}\right) = \left(e^{x^2}\right)' \cdot dx = e^{x^2} \cdot 2x \cdot dx$.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Функциясының дифференциалы және белгіленуі.
2. Функцияның дифференциалы мен өсімшесінің арасындағы байланыс.
3. Дифференциалдау ережелері.



КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

$y = f(u(x))$ күрделі функциясы берілсін. $f(u)$ функциясы u айнымалысы бойынша, $u(x)$ функциясы x айнымалысы бойынша дифференциалданатын функциялар болсын. Онда дифференциалдың анықтамасы бойынша

$$df\ (u(x)) = (f\ (u(x)))'\ dx\ =\ f_u'(u)\cdot u_x'(x)dx$$

теңдігін аламыз. Бұдан $u_x'(x)dx = du(x)$ болатынын ескерсек

$$df(u) = f'(u)\cdot du$$

теңдігіне келеміз. Бұл теңдік дифференциалдың сыртқы пішінінің / формасының инварианттылығын көрсетеді

$$(df(x) = f'(x)\cdot dx,\ df(u(x)) = f'(u)\cdot du).$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Күрделі функцияның дифференциалы және белгіленуі.



ФУНКЦИЯНЫҢ ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

$df = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$ - $y = f(x)$ *функциясының бірінші ретті дифференциалы;*

Екінші ретті дифференциал деп бірінші ретті дифференциалдың дифференциалын айтамыз да d^2y түрінде белгілейміз:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\cdot\Delta x) = (f'(x))'\cdot\Delta x\cdot\Delta x = f''(x)\cdot(\Delta x)^2 =$$
$$= f''(x)\cdot(dx)^2 = f''(x)\cdot dx^2,$$

мұндағы dx^2 дегеніміз $(dx)^2$ жазылымының қысқаша түрі.

Анықтама 2. $y = f(x)$ функциясының n *-ші ретті дифференциалы* деп $(n-1)$-ші ретті дифференциалдың дифференциалын айтамыз да d^ny түрінде белгілейміз:

$$d^n y = d(d^{n-1} f) \Rightarrow d^n y = f^{(n)}(x)dx^n,$$

мұндағы $dx^n = (dx)^n$, $n = 2,3,\ldots$.

Мысал 4: $y=(2x-3)^3$ функциясының бірінші, екінші және үшінші ретті дифференциалдарын табу керек.

Шешімі:

$$dy=3(2x-3)^2\cdot 2\,dx=6(2x-3)^2\,dx;$$

$$d^2y=12(2x-3)\cdot 2dx^2=24(2x-3)\cdot dx^2;$$

$$d^3y=24\cdot 2\cdot dx^3=48\,dx^3.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Екінші ретті дифференциал және оның есептелуі.
2. n -ші ретті дифференциал және оның есептелуі.



ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҢ ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0$ болғандықтан

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (5)$$

жуықтауының $\alpha(\Delta x)\Delta x$ қатесін Δx шамасын жеткілікті азайту арқылы жуықтаудың $|\alpha(\Delta x)\Delta x|$ абсолюттік қатесін қалауымызша азайтуға, яғни жуықтау дәлдігін қалауымызша жоғары етуге болады.

Мысал 5: $\arcsin 0{,}51$ жуық мәнін есептеу керек.

Шешімі: (5) жуықтауында $f(x) = \arcsin x$ деп алсақ, онда

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x$$

жуықтауын аламыз. Бұл жуықтауда $x = 0{,}5$ және $\Delta x = 0{,}01$ деп алсақ

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513$$

жуықтауын аламыз.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуы.

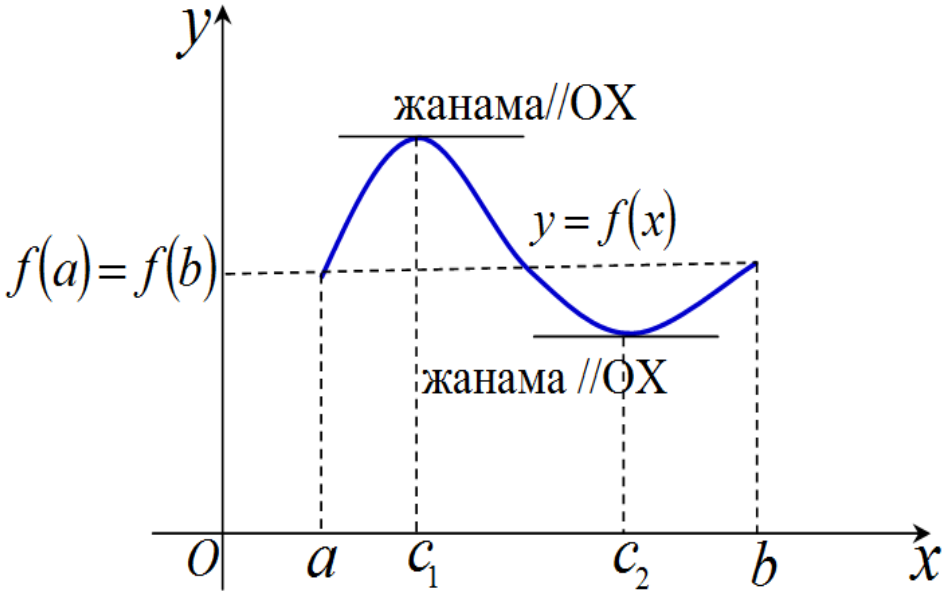


ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМАЛАР

Ролль теоремасы. Егер $f(x)$ функциясы:

1) $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын;
3) $f(a)=f(b)$, яғни кесіндінің ұштарында бірдей мән қабылдайтын болса, онда $(a;b)$ интервалында $f'(c)=0$ болатын тым болмаса бір c нүктесі табылады.

$\exists c \in (a,b): f'(c)=0 \Leftrightarrow \exists c \in (a,b): (c, f(c))$ нүктесіндегі жанама //OX .



Лагранж теоремасы. $f(x)$ функциясы:

1) $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болса, онда $(a;b)$ интервалында

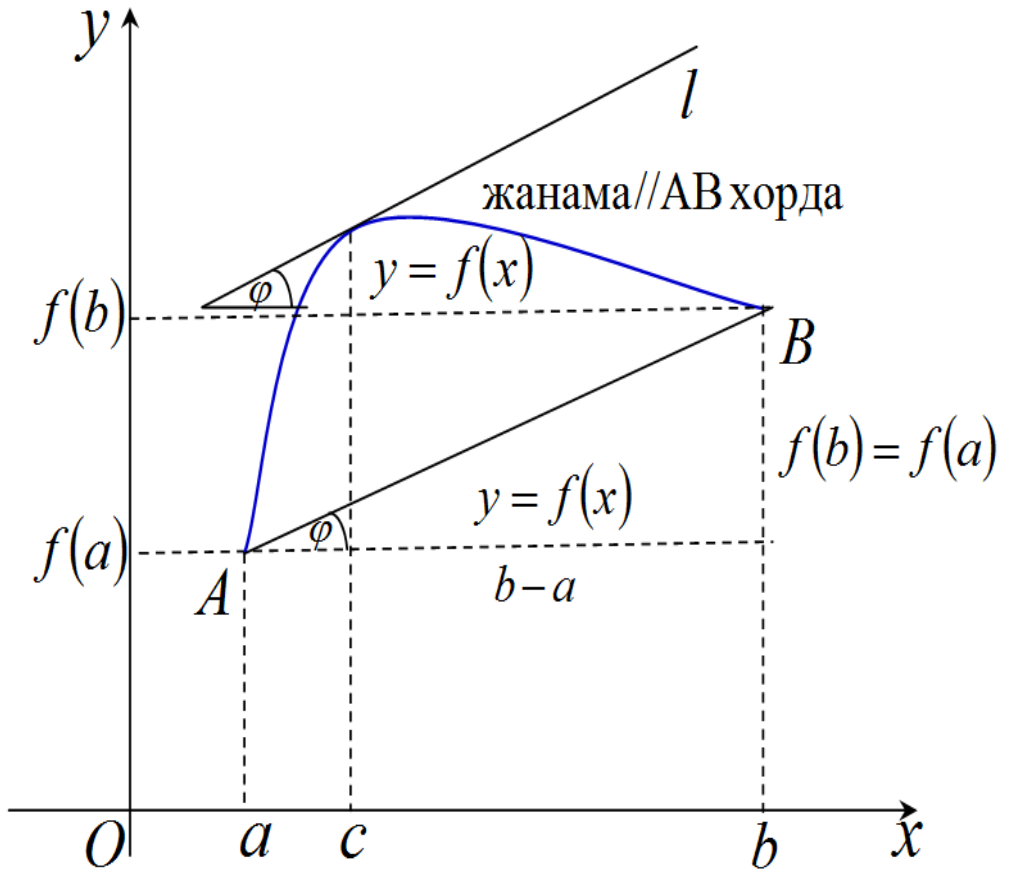
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

теңдігі орындалатындай тым болмаса бір c нүктесі табылады. c нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=tg\varphi$ - AB хордасының бұрыштық коэффициенті

$$\exists c\in(a;b):\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow\exists c\in(a;b):$$

$(c,f(c))$ нүктесінде жүргізілген жанама l // AB хорда.



Коши теоремасы. Егер $f(x)$, $g(x)$ функциялары:

1) $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(a;b)$ интервалында дифференциалданады;
3) $(a;b)$ интервалында $g'(x)\neq 0$ шарттарын қанағаттандырса, онда $(a;b)$ интервалында

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

теңдігі орындалатындай тым болмаса бір c нүктесі табылады.

Лагранж теоремасы Коши теоремасының $g(x)=x$ жағдайына сәйкес келетін дербес жағдайы болады.

Туынды (дифференциал) ұғымы *функцияның өсу, кему интервалдарын, экстремумдерін, графигінің ойыс және дөңес аралықтарын анықтауда* қолданылады.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Ролль теоремасы.
2. Лагранж теоремасы.
3. Коши теоремасы.



ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

1. Анықталу облысын табу.
2. Үзіліс нүктелерін, горизонталь және вертикаль асимтоталарын табу.
3. $f(x)$ функциясының графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу (егер мүмкін болса).
4. Функцияны жұптыққа, тақтыққа және периодтылыққа зерттеу.
5. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу.
6. Функцияның графигінің ойыстық және дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
7. Функция графигінің асимптоталарын табу.
8. Функцияның графигін салу.

Зерттеуді мысалмен қарастырайық.

Мысал 6: $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$ функциясын зерттеп, графигін салайық.

1. Анықталу облысын табу

- Функция $y = f(x)$ түрінде берілсе (анықталу облысы көрсетілмеген), онда анықталу облысы ретінде

$D = \{x : f(x) - \text{мағыналы}\}$ – жиынын аламыз.

$E = \{f(x) : x \in D\}$ - *өзгеру облысы* (*мәндер жиыны*).

1. *y функциясының анықталу облысы:*

$$D = \{x : \frac{x^2 - 5}{x - 3} - \text{мағыналы}\} = \{x : x - 3 \neq 0\} = (-\infty;3) \cup (3;+\infty).$$

($x = 3$ нүктесінен өзгеше барлық нақты сандар жиыны).

2. Үзіліс нүктелерін, горизонталь және вертикаль асимтоталарын табу

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз* деп, ал x_0 *нүктесі функцияның үзілліссіздік нүктесі* деп аталады.
- Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ болса, *онда* x_0 *нүктесі функцияның үзіліс нүктесі* деп аталады.

Біздің функция қарапайым/ элементар функция болғандықтан, ол өзінің анықталу облысында, яғни $(-\infty;3)$ және $(3;+\infty)$ интервалдарында үзіліссіз болады.

2. $x=3\notin D\Rightarrow \nexists\, f(3)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)\Rightarrow x=3$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-5}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-5}{x-3}=+\infty\Rightarrow$$

$x=3$ нүктесі - *II текті үзіліс нүктесі* және $x=3$ түзуі $x\to 3-0$ және $x\to 3+0$ жағдайларында функцияның графигінің *вертикаль асимптотасы* болады.

Функцияның анықталу облысының шеттеріндегі ($-\infty$ және $+\infty$) функцияның шегін табамыз:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-\infty;\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=+\infty\Rightarrow$$

горизонталь асимптотасы жоқ.

3. $f(x)$ функциясының графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу

Функцияның OY өсімен қиылысу нүктесін табу үшін $x=0$, ал OX өсімен қиылысу нүктесін табу үшін $y=0$ деп аламыз.

3. Сәйкесінше, $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ функциясында:

$x=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{3}$, яғни $A\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$ - графиктің OY өсімен қиылысу нүктесі;

$y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$, яғни $B\left(-\sqrt{5};0\right); C\left(\sqrt{5};0\right)$ - графиктің OX өсімен қиылысу нүктелері.

4. Функцияны жұптыққа, тақтыққа және периодтылыққа зерттеу

- Егер $\forall x \in D \ f(-x) = f(x) \quad [f(-x) = -f(x)]$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x), \ x \in D$ функциясы *жұп функция [тақ функция]* деп аталады. Жұп немесе тақ функциясының анықталу облысы D бас нүктеге симметриялы болады.
- Егер $\exists T \in R : \forall x \in D, \quad f(x) = f(x+T)$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы *периодты* деп аталады. Периодты функцияның анықталу облысы D - шектеусіз болады.

4. *Жұп та, тақ та емес*, себебі анықталу облысы $D = (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$ бас нүктеге симметриялы емес. Функцияның графигі OY өсіне де, O(0;0) координаталардың бас нүктесіне де қарағанда симметриялы емес.

$$\forall x \ \ f(x+T) = \frac{(x+T)^2 - 5}{(x+T) - 3} \equiv \frac{x^2 - 5}{x - 3} = f(x) \Leftrightarrow T = 0$$

$\Rightarrow$ *функция периодты емес.*

5. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу

- Егер $y=f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын және $\forall\ x\in(a;b)\quad f'(x)>0\quad (f'(x)<0)$ болса, онда $y=f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында *өспелі* (*кемімелі*) болады.
- X жиынында $y=f(x)$ функциясы $x_0\in X$ нүктесінің аймағында анықталған және бұл нүктеде үзіліссіз болсын. Осы аймақтың x_0 нүктесінен өзгеше барлық x нүктелері үшін

$$f(x)<f(x_0)\quad (f(x)>f(x_0))$$

теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимум (минимум) нүктесі* деп аталады.
Максимум және *минимум* нүктелері функцияның *экстремумдық нүктелері* деп аталады.
- Функцияның $f'(x)=0$ немесе үзіліс нүктелері болатын нүктелер *кризистік (стационар) нүктелер* деп аталады. Функция экстремумын тек кризистік нүктелерінде ғана қабылдай алады.

Функцияның бірінші ретті туындысын табамыз:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-5}{x-3}\right)'=\frac{(x^2-5)'(x-3)-(x-3)'(x^2-5)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

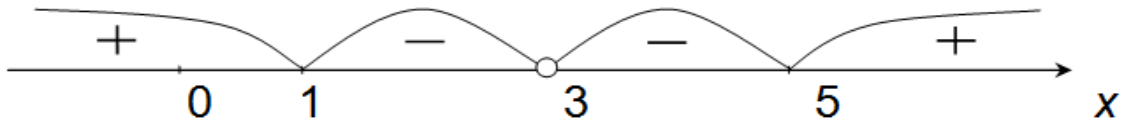
Кризистік нүктелерін ($f'(x)=0$ және $f'(x)$ болмайтын нүктелерді) табамыз:

$f'(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x=1,\ x=5$ және $x=1,\ x=5$ - кризистік нүктелер.

$f'(x)$ жоқ $\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$. $x=3\notin D\Rightarrow x=3$ кризистік нүкте емес.

Бірінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$ таңбалары:



$f(x)$ функциясы $(-\infty;1)$ интервалында өспелі $(1;3)$ интервалдарында кемімелі $\Rightarrow x=1$ - функцияның максимум нүктесі.

$f(x)$ функциясы $(3;5)$ интервалдарында кемімелі интервалдарында өспелі $\Rightarrow x=5$ - функцияның минимум нүктесі.

Экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін табайық:

$f(1)=\frac{1-5}{1-3}=2,\quad D(1;2)$ - функция графигінің максимумге сәйкес нүктесі,

$f(5)=\frac{5^2-5}{5-3}=10,\quad E(5;10)$ - функция графигінің минимумге сәйкес нүктесі.

6. Функцияның графигінің ойыстық және дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табу

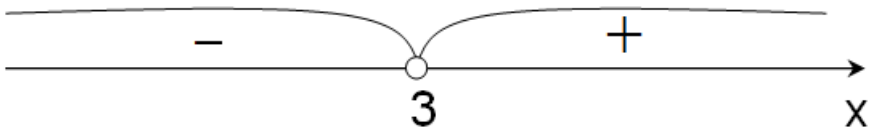
Егер қисықтың барлық нүктелері оның жанамаларының төменгі (жоғарғы) жағында орналасса, онда $y=f(x)$ қисығы *дөңес (ойыс)* деп аталады.

- Егер $y=f(x)$ қисығы x_0 нүктесінен өткенде ойыстығын дөңестікке немесе керісінше, дөңестігін ойыстыққа ауыстыратын болса, онда x_0 нүктесі $y=f(x)$ қисығының *иілу нүктесі* деп аталады.
- Егер (a,b) аралығында $f''(x)<0 \quad [f''(x)>0]$ болса, онда $y=f(x)$ қисығы (a,b) аралығында *дөңес* (*ойыс*) болады.
- Егер $x_0 \in D, f''(x_0)=0$ немесе $f''(x_0)$ жоқ болса және x_0 нүктесінен өткенде $f''(x\ )$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі - *иілу нүктесі* болады.

Функцияның екінші ретті туындысын табайық

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}.$$

Екінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.
$f''(x)$ - таңбалары:



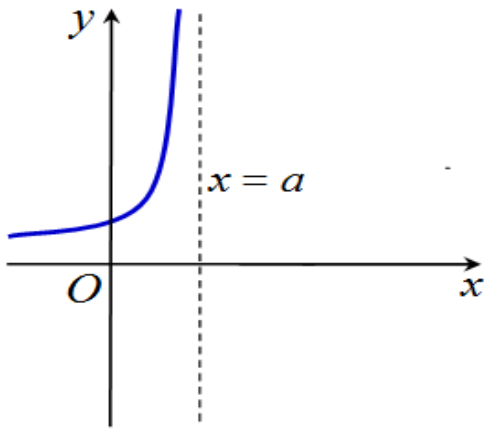
$(-\infty;3)$ интервалында $f''(x)<0 \Rightarrow (-\infty;3)$ интервалында график *дөңес*.
$(3;+\infty)$ интервалында $f''(x)>0 \Rightarrow (3;+\infty)$ интервалында график *ойыс*.
$x=3$ нүктесінде функция анықталмаған, онда ол *иілу нүктесі болмайды*.

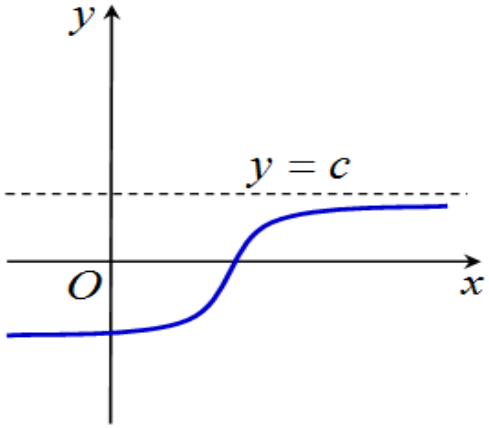
7. Функция графигінің асимптоталарын табу

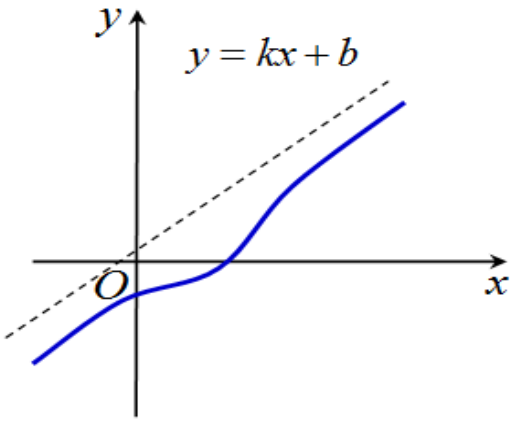
Егер қисықтың M ағымдық нүктесі бас нүктеден шектеусіз алыстағанда M нүктесінен түзуге дейінгі арақашықтық нөлге ұмтылатын болса, онда түзу *қисықтың асимптотасы* деп аталады.

Асимтоталар, олардың OX өсіне қарай орналасуына байланысты *вертикаль, горизонталь* және *көлбеу асимтота* болып үш түрге бөлінеді:

a) $x = a$ түзуі – вертикаль түзу, b) $y = c$ түзуі – горизонталь түзу, c) $y = kx + b$ түзуі – көлбеу түзу.







a) Егер $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ немесе $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ болса, онда $x = a$ түзуі $f(x)$ функциясының графигіне (функцияға) *вертикаль асимптота* болады.

b) Егер $x = a$ нүктесі функцияның үзіліссіздік нүктесі болса, онда $x = a$ түзуі функцияның вертикаль асимптотасы болмайды.

c) Егер $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ немесе $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ және c – сан болса, онда $y = c$ түзуі $f(x)$ функциясының графигіне *горизонталь асимптота* болады.

Егер

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b,$$

k, b – сандар және $k \neq 0$ болса, онда $y = kx + b$ түзуі $f(x)$ функциясының графигіне *көлбеу асимптота* болады.

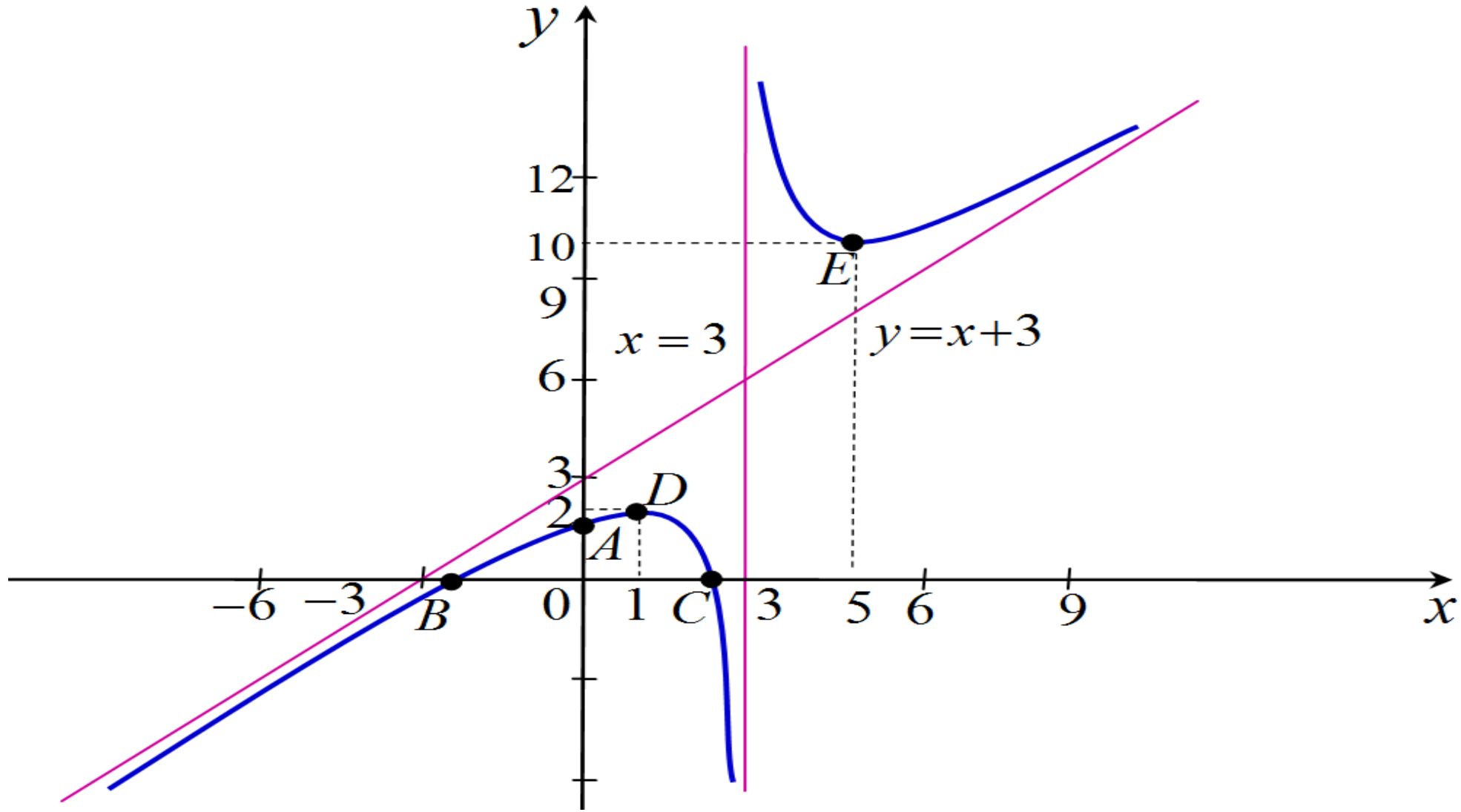
$x = 3$ түзуі *вертикаль* асимптота болатыны және *горизонталь асимптотасының жоқ* екені 2 – пунктте көрсетілген болатын. Енді көлбеу асимптотасын қарастырамыз. Көлбеу асимптотаның теңдеуін $y = kx + b$ түрінде іздейміз:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5}{(x-3)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 3x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x - 3} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5 - x^2 + 3x}{x - 3} = 3.$$

Демек, $y = x + 3$ – *көлбеу асимптота.*

8. Функцияның графигін салу



ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ



1. Анықталу облысын табу.
2. Үзіліс нүктелерін, горизонталь және вертикаль асимтоталарын табу.
3. Функция графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу (егер мүмкін болса).
4. Функцияны жұптыққа, тақтыққа және периодтылыққа зерттеу.
5. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу.
6. Функцияның графигінің ойыстық және дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
7. Функция графигінің көлбеу асимптотасын табу.
8. Функцияның графигін салу.

ТУЫНДЫНЫҢ ЭКОНОМИКАДА ҚОЛДАНЫЛУЫ

Еңбек өнімділігі туралы есеп. $u = u(t)$ функциясы t уақыт мөлшеріндегі өндірілген өнімнің көлемі болсын. t_0 сәтіндегі еңбек өнімділігін табу керек. t_0 уақытынан $t_0 + \Delta t$ уақытына дейін өндірілген өнімнің саны $u_0 = u(t_0)$ мәнінен $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$ мәніне дейін өседі. Олай болса

$$z_{орт} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Δt уақыт аралығындағы орташа еңбек өнімділігі болады. Онда

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

t_0 сәтіндегі еңбек өнімділігін береді.

Сонымен, еңбек өнімділігінің уақыттан тәуелділігінің өндірілген өнім мөлшерінің *уақыт бойынша туындынысы ретінде*, яғни *шектік шама ретінде* берілетінін көрдік.

Экономиканың табыс, өнім, пайдалылық және басқа көрсеткіштерін де шектік шама ретінде сипаттауға болады.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Туындының қолданбаларына мысалдар келтіріңіз.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

