Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 10

БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ

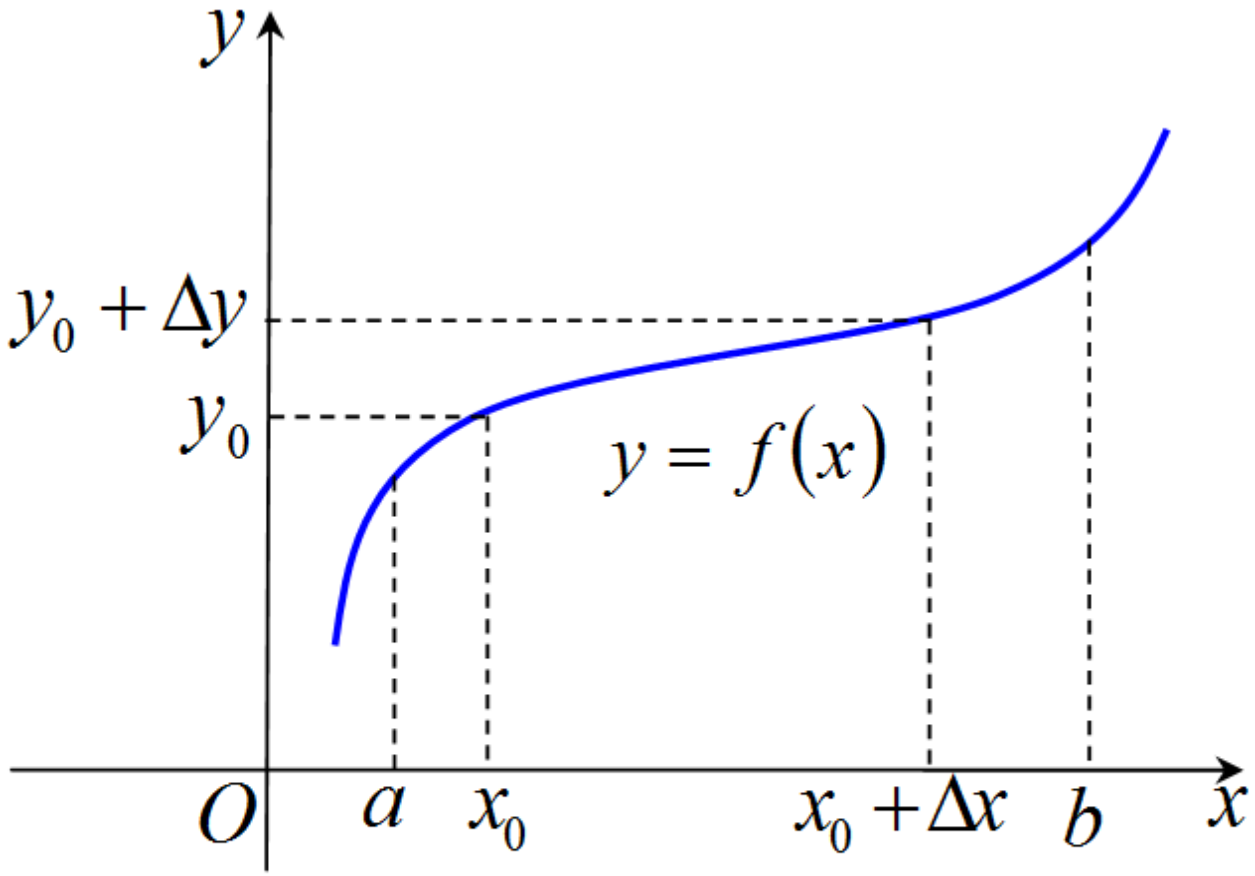
ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Туынды ұғымы, оның механикалық және геометриялық мағынасы;
2. Дифференциалдау ережелері;
3. Жоғарғы ретті туындылар;
4. Лопиталь ережесі.

ТУЫНДЫ ҰҒЫМЫ,
ОНЫҢ МЕХАНИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

$y=f(x)$ функциясы (a,b) интервалында анықталған және $x_0 \in (a,b)$ болсын. x_0 аргументіне $x_0+\Delta x \in (a;b)$ болатындай $\Delta x \neq 0$ өсімшесін берейік. Онда

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$



$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі аргументтің Δx өсімшесіне сәйкес өсімшесі болады.

Анықтама 1. $y=f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі туындысы* деп функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шектеулі (ақырлы) шегі айтылады.

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын $f'(x_0), y'(x_0)$ немесе $\frac{dy}{dx}$ түрінде белгіленеді:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

$$(\Delta x\to 0 \Leftrightarrow x-x_0\to 0 \Leftrightarrow x\to x_0)\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

x нүктесінде туындысы бар функцияны x *нүктесінде дифференциалданатын функция* дейміз.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow$$

$y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз. $\Rightarrow$

Тұжырым. Егер $y=f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда функция осы нүктеде үзіліссіз. Кері тұжырым орынды емес, яғни кез келген үзіліссіз функция дифференциалдана бермейді.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ сан $\Rightarrow$ бөлшектің бөлімі $x-x_0$ нөлге ұмтылғандықтан, бөлшек санға ұмтылуы үшін оның алымы да нөлге ұмтылуы керек, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ болуы керек $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Rightarrow f(x)$ – функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ сан

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Мысал 1: $y=|x|$ функциясы кез келген нүктеде үзіліссіз, бірақ бұл функцияның $x=0$ нүктесінде туындысы жоқ (дифференциалданбайды).

Дәлелдеуі:

$y=|x|$ функциясының үзіліссіздігін қарастырайық.

$y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ аралығында анықталған. $y=-x$ және $y=x$ функциялары кез келген нүктеде үзіліссіз, олай болса $y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$ функциясы тек $y=-x$ түрінен $y=x$ түріне өтетін $x=0$ нүктесінде ғана үзілісті болуы мүмкін. Функцияны $x=0$ нүктесінде үзіліссіздікке тексереміз. Функцияның $x=0$ нүктесіндегі біржақты шектерін табайық:

$$\lim_{x\to 0-0} y=\lim_{x\to 0-0}(-x)=0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

Функцияның $x=0$ нүктесіндегі біржақты шектердің екеуі де нөлге тең, олай болса функцияның $x=0$ нүктесіндегі шегі де нөлге тең болады:

$$\lim_{x\to 0} y=0.$$

Функцияның $x=0$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$y(0)=0.$$

Демек, $\lim\limits_{x\to 0} y=y(0)$, яғни $y=|x|$ функциясы $x=0$ нүктесінде үзіліссіз.

Функцияның $x=0$ *нүктесінде дифференциалданбайтындығын* көрсету үшін функцияның $x=0$ нүктесіндегі туындысын қарастырайық. Туындының анықтамасы бойынша:

$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{y(0+h)-y(0)}{h}.$$

Сол және оң жақты шектерді есептейік:

Егер $x\to 0-0$, яғни x нөлге сол жақтан ұмтылса, онда $y(x)=-x$ болады да

$$\lim_{h\to 0-0}\frac{y(0+h)-y(0)}{h}=\lim_{h\to 0-0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0-0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0-0}(-1)=1$$

болады.

Егер $x\to 0+0$, яғни x нөлге оң жақтан ұмтылса, онда $y(x)=x$ болады да

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{y(0+h)-y(0)}{h}=\lim_{h\to 0+0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0=0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0+0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0+0}1=1$$

болады.

$x=0$ нүктесіндегі $\lim\limits_{h\to 0-0}\dfrac{y(0+h)-y(0)}{h}$ және $\lim\limits_{h\to 0+0}\dfrac{y(0+h)-y(0)}{h}$ біржақты шектері тең емес, олай болса $x=0$ нүктесінде $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y(0+h)-y(0)}{h}$ шегі, яғни функцияның $x=0$ нүктесінде туындысы $y'(0)$ жоқ.

Туындының механикалық мағынасы

$S = f(t)$ функциясының M материалдық нүктесінің түзу бойымен қозғалысының заңдылығын сипаттайтын функция болсын, яғни $S = f(t)$ функциясының t нүктесіндегі мәні M нүктесінің t уақытында жүріп өткен жолы болсын. Онда функцияның $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$ өсімшесі M нүктесінің $[t, t+\Delta t]$ уақыт аралығында жүріп өткен жолын береді де, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ қатынасы M нүктесінің осы уақыт аралығындағы орташа жылдамдығын береді.

Олай болса, лездік жылдамдықтың анықтамасы бойынша, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ шегі M нүктесінің t сәтіндегі лездік жылдамдығын береді:

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = V(t)$ - M нүктесінің t сәтіндегі лездік жылдамдығы.

Екінші жағынан

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Бұл екі теңдіктен

$$S'(t) = V(t)$$

теңдігін, яғни t нүктесіндегі туындының қозғалыстың t сәтіндегі лездік жылдамдығы болатынын аламыз.

Мысал 2: $S = \frac{gt^2}{2}$ формуласымен қозғалатын материалдық нүктенің $t = 2$ сек. сәтіндегі лездік жылдамдығын табу керек.

Шешімі:

$$V(t) = S'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = gt.$$

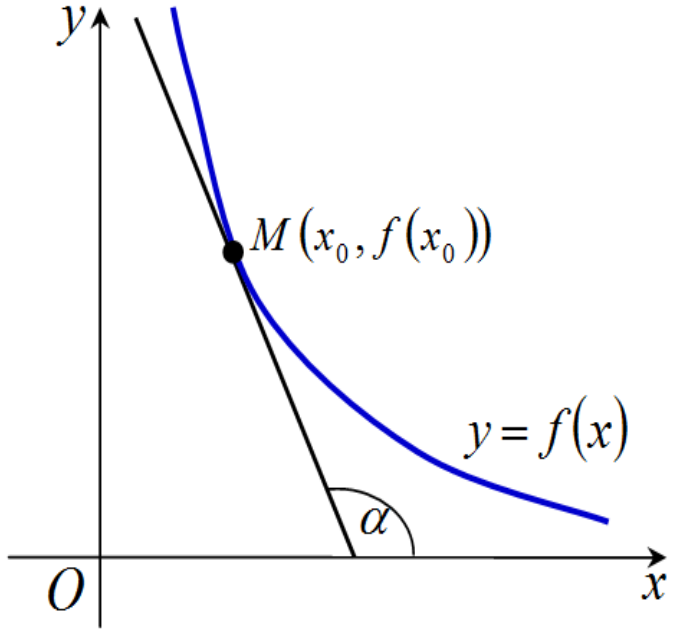
Сонымен, $t = 2$ сек. сәтіндегі лездік жылдамдығы

$$V(2) = g \cdot 2 = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6 \ м/сек.$$

Туындының геометриялық мағынасы

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы $f'(x)$ функциясының графигіне $M_0(x_0,f(x_0))$ нүктесінде (x_0 нүктесінде) жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін, яғни жанама мен Ox өсінің арасындағы бұрыштың тангенсін береді:

$$f'(x_0)=tg\alpha.$$



$y=f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген *жанаманың теңдеуі*

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

түрінде жазылады.

Жанасу нүктесінен жанамаға перпендикуляр өтетін түзу *нормаль* деп аталады.

$y=f(x)$ функциясының графигіне x_0 *нүктесінде жүргізілген нормальдың теңдеуі*

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0) \qquad (3)$$

түрінде жазылады.

Мысал 3: $y = x^2 + 6x + 8$ функциясының графигіне $x_0 = -1$ нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдың теңдеулерін жазу керек.

Шешімі: $x_0 = -1 \mapsto f(x) = x^2 + 6x + 8 \Rightarrow$

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 + 6(-1) + 8 = 3 \Rightarrow f(x_0) = 3 \Rightarrow$$

функциясының графигіне жанама мен нормаль $M(-1;3)$ нүктесінде жүргізілген:

$$f'(x_0) = f'(-1) = \left(x^2 + 6x + 8\right)'\Big|_{x=-1} = (2x+6)\Big|_{x=-1} = 4$$

$$x_0 = -1,\ f(x_0) = 3,\ f'(x_0) = 4 \mapsto y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 4(x+1) \Rightarrow$$

$y = 4x + 7$ - *жанаманың теңдеуі;*

$$x_0 = -1,\ f(x_0) = 3,\ f'(x_0) = 4 \mapsto y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{4}(x+1) \Rightarrow$$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$ - *нормальдың теңдеуі.*

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Функцияның туындысының анықтамасы.
2. Функцияның туындысының механикалық мағынасы.
3. Функцияның туындысының геометриялық мағынасы.



ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

Теорема 1. c тұрақтысы мен $u(x), v(x)$ дифференциалдана-тын функциялар үшін келесі теңдіктер орындалады:

1) $(c)' = 0;$

2) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$

3) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$

$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x);$

4) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0;$

$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{u'(x)}{c};$

$\left(\frac{c}{u(x)}\right)' = c \cdot (u^{-1}(x))' = -\frac{c}{u^2(x)} u'(x).$

5) Күрделі функцияның туындысы

Егер $y = F(u)$ функциясының u нүктесінде және $u = u(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = F(u(x))$ күрделі функциясының x нүктесіндегі туындысы

$$[F(u(x))]' = F'(u) \cdot u'(x) \qquad (4)$$

формуласымен анықталады (*күрделі функцияны дифференциалдау ережесі*).

Негізгі қарапайым функциялардың туындыларының кестесі

1	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$\left[(u(x))^n\right]' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$
3	$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m}{x^{m+1}}$	$\left(\frac{1}{(u(x))^m}\right)' = -\frac{m}{(u(x))^{m+1}} \cdot u'(x)$
4	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$
5	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
8	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$
9	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$
10	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
11	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu(x))' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
13	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
14	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg\, u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
15	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
16	$(shx)' = chx$	$(shu)' = chu \cdot u'(x)$
17	$(chx)' = shx$	$(chu)' = shu \cdot u'(x)$
18	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'(x)$
19	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	$(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'(x)$

Мысал 4: $\left(2x^3-5x^2+7x+4\right)'=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+7\cdot 1+0=6x^2-10x+7.$

Мысал 5: $\left(x^3 arctgx\right)'=(x^3)'\cdot arctgx+x^3\cdot(arctgx)'=3x^2\cdot arctgx+x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}=$

$$=3x^2\cdot arctgx+\frac{x^3}{1+x^2}.$$

Мысал 6: $\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)'=\frac{(\arcsin x)'\cdot x-\arcsin x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\arcsin x}{x^2}=$

$$=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Мысал 7: $\left(\sin(2x+3)\right)'=\cos(2x+3)\cdot(2x+3)'=2\cdot\cos(2x+3).$

Мысал 8: $\left(tg^6 x\right)'=6tg^5 x\cdot(tgx)'=6tg^5 x\cdot\sec^2 x.$

6) Кері функцияның туындысы

Егер $y=f(x)$ функциясы (a,b) аралығында дифференциалданатын функция және $f'(x)>0\,(f'(x)<0)$ болса, онда оның $x=\varphi(y)$ кері функциясы да осы аралықта дифференциалданатын функция және кері функцияның туындысы

$$x'_y=\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad (5)$$

болады.

Мысал 9: $y=\ln x$ функциясының туындысын оның кері функциясының туындысын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$$y=\ln x \Rightarrow x=e^y;$$

$$(5)\Rightarrow f'(y)=\frac{1}{x'_y}\Rightarrow (\ln x)'=\frac{1}{\left(e^y\right)'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}\Rightarrow (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Мысал 10: $y = \arcsin x$ функциясының туындысын оның кері функциясының туындысын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y,$$

$$(5) \Rightarrow y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Косинусты синус арқылы өрнектейміз:

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)};$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\arcsin x) \ge 0 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}.$$

Онда

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7) Айқындалмаған функцияның туындысы

x айнымалысынан тәуелді y функциясы $F(x,y)=0$ *айқындалмаған түрінде берілген.* $y'=\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Ол үшін $F(x,y)=0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз да, нәтижесінде алған теңдеуден y' туындысын $y'=\varphi(x,y)$ түрінде өрнектеп аламыз.

Мысал 11: $x^3+\ln y-x^2e^y=0$ теңдеуінен y'_x туындысын табу керек.

Шешімі: Теңдеудің екі жағын да x бойынша дифференциалдап, нәтижесінде алған теңдеуден y' туындысын табамыз:

$$3x^2+\frac{y'}{y}-\left(x^2e^y\cdot y'+2xe^y\right)=0\Rightarrow 3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^y\cdot y'-2xe^y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2\Rightarrow y'=\frac{2xe^y-3x^2}{\frac{1-x^2e^y y}{y}}\Rightarrow y'=\frac{(2xe^y-3x^2)\cdot y}{1-x^2ye^y}.$$

Мысал 12: $y^2+2x^2y=0$ айқындалмаған функцияның $M(1,-2)$ нүктесіндегі y'_x туындысын табыңыз.

Шешімі: $y^2+2x^2y=0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:

$$2yy'+4xy+2x^2y'=0 \Rightarrow (2y+2x^2)y'=-4xy \Rightarrow y'=\frac{-4xy}{2y+2x^2} \Rightarrow$$

$$y'\big|_M=\left.\frac{-4xy}{2y+2x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}}=\frac{-4\cdot 1\cdot(-2)}{2\cdot(-2)+2\cdot 1^2}=-2.$$

8) Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

x айнымалысынан тәуелді y функциясы

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1$$

параметрлік түрінде берілсін.

Егер $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және $\varphi'(t) \neq 0$ болса, онда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (6)$$

теңдігі орынды болады.

Мысал 13: $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$ функциясы берілген. y'_x туындысын табыңыз.

Шешімі: $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және

$$\varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow y' = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2\left(t^2 + 1\right)}{3\left(t^2 + 1\right)} = 5t^2.$$

Мысал 14: $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = \sin t \end{cases}$ функциясы берілген. y'_x туындысының $t = 0$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі: $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және

$$\varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow y'|_{t=0} = \frac{(\sin t)'}{(2t+3)'}\Bigg|_{t=0} = \frac{\cos t}{2}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

9) Логарифмдік дифференциалдау

Логарифмдік дифференциалдау деп функцияның туындысын функцияны логарифмдеу мен дифференциалдау амалдарын біртіндеп қолдану арқылы табу әдісін айтамыз.

Бұл әдіс кейбір функциялардың туындысын табуды жеңілдетеді. Мысалға, $y = u(x)^{v(x)}$ көрсеткіштік - дәрежелік функциясын қарастырайық:

a) $y = u(x)^{v(x)}$ теңдігін логарифмдейміз:

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v(x)\ln u(x);$$

b) соңғы теңдікті y – тің x - тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{y}y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x);$$

c) y' – ті өрнектеп аламыз:

$$y' = y\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)\right) \Rightarrow$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)\right) \Rightarrow$$

$$y' = u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'. \qquad (7)$$

Мысал 15: $y=\left(x^2+1\right)^x$ функциясы берілген. y' туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $y=\left(x^2+1\right)^x$ теңдігін логарифмдейміз:

$$\ln y=\ln\left(x^2+1\right)^x \Rightarrow \ln y=x\ln\left(x^2+1\right);$$

b) соңғы теңдікті y – тің x - тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{y}y'=1\cdot\ln(x^2+1)+x\frac{1}{x^2+1}2x;$$

c) y' – ті өрнектеп аламыз:

$$y'=y\left(\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right);$$

$$y'=(x^2+1)^x\left(\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

Салдар. $y = u^v$ көрсеткіштік-дәрежелік функциясының туындысы оның көрсеткіштік функция ретінде алынған туындысы мен дәрежелік функция ретінде алынған туындысының қосындысына тең.

Енді $y = \left(x^2 + 1\right)^x$ функциясының туындысын *салдарды* қолданып табайық.

a) туындыны көрсеткіштік функция ретінде аламыз:

$$\left((x^2+1)^x\right)' = (x^2+1)^x \ln\left(x^2+1\right);$$

b) туындыны дәрежелік функция ретінде аламыз:

$$\left((x^2+1)^x\right)' = x(x^2+1)^{x-1}2x = 2x^2(x^2+1)^{x-1};$$

c) салдар бойынша y'- осы екі туындының қосындысы болады:

$$y' = (x^2+1)^x \ln\left(x^2+1\right) + 2x^2(x^2+1)^{x-1} = (x^2+1)^x\left(\ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Дифференциалдаудың негізгі ережелері.
2. Күрделі функцияның туындысы.
3. Негізгі қарапайым функциялардың туындыларының кестесі.
4. Кері функцияның туындысы.
5. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы.
6. Айқындалмаған функцияның туындысы.
7. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы.
8. Логарифмдік дифференциалдау.



ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР

$y = f(x)$ функциясының бірінші ретті туындысы $y' = f'(x)$ дифференциалданатын функция болса, онда оның (бірінші ретті туындының) туындысы $y = f(x)$ *функциясының екінші ретті туындысы* деп аталады да $y'', y^{(2)}$ немесе $\frac{d^2y}{dx^2}$ түрінде белгіленеді:

$$y'' = (y')'.$$

$y = f(x)$ функциясының n - *ретті туындысы* деп оның $(n-1)$-ретті туындысының туындысын айтамыз да $y^{(n)}$ немесе $\frac{d^ny}{dx^n}$ түрінде белгілейміз:

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'. \qquad (8)$$

Мысал 16: $y=\sin\left(x^2+3\right)$ функциясының y'' екінші ретті туындысын табыңыз.

Шешімі:

$$y'=\left(\sin\left(x^2+3\right)\right)'=\cos\left(x^2+3\right)\left(x^2+3\right)'=\cos\left(x^2+3\right)\left(2x+0\right)=2x\cos\left(x^2+3\right)$$

$$y''=\left(2x\cdot\cos\left(x^2+3\right)\right)'=2\cdot\cos\left(x^2+3\right)+2x\cdot 2x\cdot\left(-\sin\left(x^2+3\right)\right)=$$

$$=2\cdot\cos\left(x^2+3\right)-4x^2\cdot\sin\left(x^2+3\right).$$

Мысал 17: $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$ функциясының y''' үшінші ретті туындысын табыңыз.

Шешімі:

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3};$$

$$y'' = \left(12x^2 + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3}\right)' = 12 \cdot 2x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + 4 \cdot (-3)x^{-4} = 24x - \frac{3}{4\sqrt{x^3}} - \frac{12}{x^4};$$

$$y''' = \left(24x - \frac{3}{4} x^{-\frac{3}{2}} - 12x^{-4}\right)' = 24 - \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} - 12 \cdot (-4)x^{-5} = 24 - \frac{9}{8\sqrt{x^5}} + \frac{48}{x^5}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Функциясының екінші ретті туындысы.
2. Функциясының n - ретті туындысы.



ЛОПИТАЛЬ ЕРЕЖЕСІ

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ шегін қарастырайық.

Теорема 2 (Лопиталь ережесі).

Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ шегі $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтардың біріне әкелсе және $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

болады.

Мысал 18: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ шегін Лопиталь ережесін қолданып табыңыз.

Шешімі: Шекке көшу $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді. Онда бұл шекке Лопиталь ережесін қолдануға болады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Мұнда Лопиталь ережесі қатарынын үш рет қолданылды.

$0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\infty^0,1^\infty$ *түріндегі анықталмағандықтарға Лопиталь ережесін қолдану*

1) $0\cdot\infty$ немесе $\infty-\infty$ анықталмағандықтарын, оларды алдын ала $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарына түрлендіріп алып Лопиталь ережесін қолданып ашуға болады.

Мысал 19:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \left|0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Мысал 20:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \left|\infty-\infty\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

2) $0^0, \infty^0, 1^\infty$ анықталмағандықтарын берілген функцияны логарифмдеу мен тепе-тең түрлендірулер арқылы Лопиталь ережесін қолдануға болатын анықталмағандыққа келтіруге болады.

Мысал 21:

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = |0^0| = \left|\begin{array}{c} y=(\sin x)^x \\ \ln y = \ln(\sin x)^x \\ \ln y = x\ln(\sin x) \\ \ln y = \dfrac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\cos x}{\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos x + x^2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{x\to 0} y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = 1.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Лопиталь ережесі.
2. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0, \infty^0, 1^\infty$ түріндегі анықталмағандықтарға Лопиталь ережесін қолдану.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

