Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 9

ШЕКСІЗ АЗ ЖӘНЕ ШЕКСІЗ ҮЛКЕН ШАМАЛАР. ТАМАША ШЕКТЕР. ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар (ШАШ және ШҮШ). Негізгі анықталмағандықтар;
2. Тамаша шектер;
3. Шексіз аз (үлкен) шамаларды салыстыру;
4. Функцияның үзіліссіздігі;
5. Функцияның үзіліс нүктелері;
6. Аралықта үзіліссіз функциялар.

ШЕКСІЗ АЗ ЖӘНЕ ШЕКСІЗ ҮЛКЕН ШАМАЛАР (ШАШ ЖӘНЕ ШҮШ). НЕГІЗГІ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР

Анықтама 1. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ [$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$] болса, онда $f(x)$ функциясы x айнымалысы a санына ұмтылғанда *шексіз аз шама (ШАШ) (шексіз үлкен шама (ШҮШ))* деп аталады.

Жазылуы: $x\to a \Rightarrow f(x)$ - *ШАШ (ШҮШ).*

Мысал 1: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=0$ және $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty$ екені көрсетілген болса, онда $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ функциясы $x\to 1$ жағдайында *ШАШ*, ал $g(x)=\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ функциясы $x\to 10$ жағдайында *ШҮШ* болады.

Қасиеттері:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (x \to a \Rightarrow f(x) - A = \alpha(x)$ - ШАШ);
2. $ШАШ \cdot ШАШ = ШАШ$;
3. $ШАШ \cdot ШЕКТЕЛГЕН \quad ШАМА = ШАШ$;
4. $\dfrac{1}{ШАШ} = ШУШ$;
5. $\dfrac{1}{ШУШ} = ШАШ$.

Шектерді есептеу барысында

$$\frac{ШАШ}{ШАШ};\quad \frac{ШУШ}{ШУШ};\quad ШАШ\cdot ШУШ;\quad ШУШ-ШУШ;\quad ШАШ^{ШУШ};$$

$$ШУШ^{ШАШ};\quad (1+ШАШ)^{ШУШ}$$

түрлеріндегі шектері анықталмаған өрнектер жиі кездеседі. Бұл өрнектер *анықталмағандықтар* деп аталады да, шартты түрде төмендегіше белгіленеді:

- $\frac{ШАШ}{ШАШ}$ - $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық;
- $\frac{ШУШ}{ШУШ}$ - $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық;
- $ШАШ\cdot ШУШ$ - $0\cdot\infty$ түріндегі анықталмағандық;
- $ШУШ-ШУШ$ - $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандық;
- $ШАШ^{ШУШ}$ - 0^{∞} түріндегі анықталмағандық;
- $ШУШ^{ШАШ}$ - ∞^{0} түріндегі анықталмағандық.

Егер $x\to a\Rightarrow u(x)\to 1,\ v(x)\to\infty$ болса, онда $u(x)^{v(x)}$ өрнегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты береді.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар (ШАШ және ШҮШ) ұғымдары, мысалдар.
2. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалардың қасиеттері.
3. Негізгі анықталмағандықтар түрлері.



ТАМАША ШЕКТЕР

$\frac{0}{0}$ және $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуда қолданылатын бірнеше белгілі шектерді келтіреміз.

Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (мұнда $a=\infty$ жағдайы да мүмкін) болса, онда:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ - *бірінші тамаша шек;*
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1;$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a;$

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=1;$

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=\log_a e;$

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{[1+\alpha(x)]^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu;$

10. $\lim\limits_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}=e$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right]^{\alpha(x)}=e\right)$ - *екінші тамаша шек.*

1 – 9 шектері $\dfrac{0}{0}$ түріндегі, 10 шегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты ашуда қолданылады.
2 – 4 шектері бірінші тамаша шектің, 5 – 9 шектері екінші тамаша шектің салдары болады.

Мысал 2: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg2x}$ шегін табыңыз.

Шешімі: $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x = 0$ және $\lim\limits_{x\to 0} tg2x = 0$ болғандықтан, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg2x}$ шегі $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді. Бұл анықталмағандықты берілген шекті 1 және 2 түріндегі белгілі шектерге түрлендіру арқылы ашамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{tg2x}{2x}\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{2x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{tg2x}{2x}} = \frac{5}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{5}{2}.$$

Мысал 3: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ шегін табыңыз.

Шешімі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0$ болғандықтан, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ шегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты береді. Берілген шекті, $\alpha(x)=\frac{3}{x}$ ауыстыруы арқылы, $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0$ болатынын ескере отырып, 10 түріндегі шекке түрлендіреміз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Бірінші тамаша шек және салдарлары.
2. Екінші тамаша шек және салдарлары.



ШЕКСІЗ АЗ (ҮЛКЕН) ШАМАЛАРДЫ САЛЫСТЫРУ

$x \to a \Rightarrow \alpha(x), \beta(x) - ШАШ$ және $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ болсын.

Егер

1) $C \neq 0$ - сан болса, онда α және β - *бірдей ретті шексіз аз шамалар* деп аталады. Бірдей реттілік $\alpha = O(\beta)$ түрінде белгіленеді;

Мысал 4: $\alpha = 4x^2$ және $\beta = 15x^2$ функциялары x нөлге ұмтылғанда ШАШ болады. Олардың реттерін салыстырыңыз.

Шешімі: α және β шамаларының қатынасының x нөлге ұмтылғандағы шегін табамыз: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2}{15x^2} = \dfrac{4}{15} \neq 0$. Бұл теңсіздіктен x нөлге ұмтылғанда α мен β - бірдей ретті ШАШ, яғни $\alpha = O(\beta)$ болатыны шығады.

2) $C=1$ болса, онда α және β - *эквивалентті шексіз аз шамалар* деп аталады;

Эквиваленттілік $\alpha \sim \beta$ түрінде белгіленеді.

$x \to 0$ жағдайында:

1. $\sin x \sim x;$
2. $tgx \sim x;$
3. $\arcsin x \sim x;$
4. $arctgx \sim x;$
5. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2};$
6. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a;$
7. $e^x - 1 \sim x;$
8. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e;$
9. $\ln(1+x) \sim x;$
10. $(1+x)^k \sim k \cdot x, k>0.$

Ескерту. Шекті есептеу кезінде шексіз аз шаманы оған эквивалентті шамамен ауыстыруғаннан шектің мәні өзгермейді.

3) $C=0$ болса, $\alpha(x)$ *шексіз аз шамасы* $\beta(x)$ *шексіз аз шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама* болады дейміз де, оны $\alpha=0(\beta)$ түрінде жазамыз;

Мысал 5: $\alpha=2x^4$ және $\beta=7x$ функциялары x нөлге ұмтылғанда ШАШ болады. Олардың реттерін салыстырыңыз.

Шешімі: α және β шамаларының қатынасының x нөлге ұмтылғандағы шегін табамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{7}=0.$$

Бұл теңдіктен x нөлге ұмтылғанда α шектеусіз аз шамасының реті β шектеусіз аз шамасының ретінен жоғары, яғни $\alpha=0(\beta)$ болатыны шығады.

4) $C=\infty$ болса, $\beta(x)$ шексіз аз шамасы $\alpha(x)$ шексіз аз шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама болады дейміз де $\beta=o(\alpha)$ түрінде жазамыз.

Шексіз үлкен шамалар осыған ұқсас салыстырылады.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Шексіз аз (үлкен) шамаларды салыстыру.
2. Эквиваленттілік және оның қолданысы.



ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

Анықтама 2. $f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз* деп аталады, егер

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

теңдігі орындалса.

Анықтамадан, егер функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда:

1) ол x_0 нүктесінің қандай да бір аймағында анықталған;
2) оның x_0 нүктесінде ақырлы шегі бар (шегі санға тең);
3) оның x_0 нүктесіндегі шегі осы нүктедегі мәніне тең болатыны шығады.

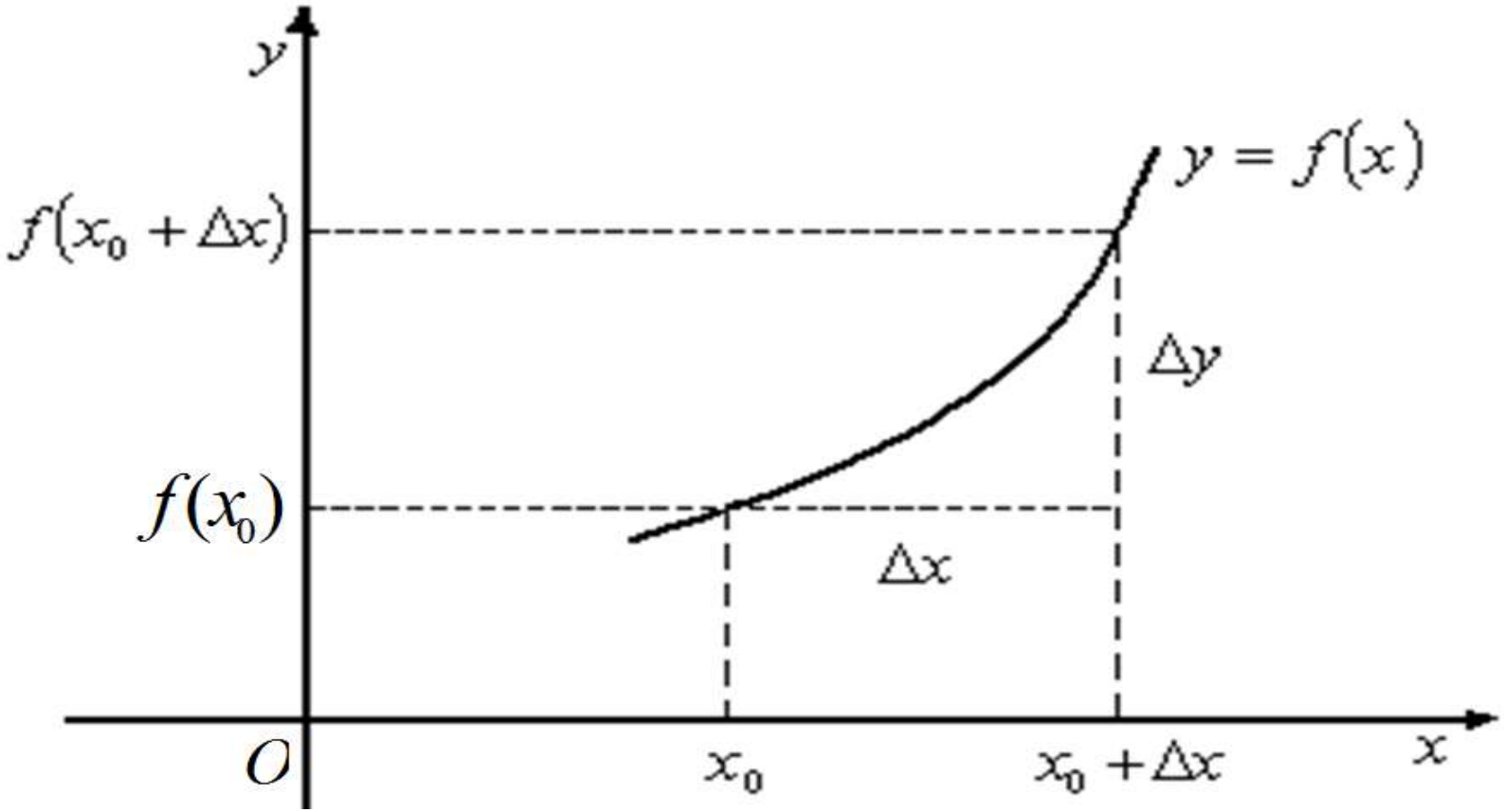
Егер аталған үш шарттың тым болмағанда біреуі орындалмаса, онда $y = f(x)$ функциясы x_0 *нүктесінде үзілісті функция* болады да x_0 *нүктесі* $f(x)$ *функциясының үзіліс нүктесі* деп аталады.

Үзіліссіздіктің өсімшелер тіліндегі анықтамасы:

x аргументінің мәніне Δx өсімшесін берсек $y = f(x)$ функциясы

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

өсімшесін алады.



Анықтама 3. $y = f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз* дейміз, егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ болса, яғни аргументтің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе.

2, 3 анықтамалары эквивалентті, яғни олардың біреуі бойынша үзіліссіз функция екіншісі бойынша да үзіліссіз болады.

Анықтама 4. Егер $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $(f(x_0 + 0) = f(x_0))$ болса, онда $y = f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде сол жақты (оң жақты) үзіліссіз* дейміз, мұндағы $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ $\left(f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)\right)$.

Мысал 6: $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$ функциясының $x \to a$ біржақты шектерін табу керек.

Шешімі: Егер $x \to a-0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{-0}=-\infty.$

Сонымен

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a-0} e^{\frac{1}{x-a}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Егер $x \to a+0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{+0}=+\infty.$

Сонымен

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} e^{\frac{1}{x-a}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

Мысал 7: $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ функциясының $x\to 3$ біржақты шектерін табу керек.

Шешімі: Егер $x\to 3-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-3}\to -\infty.$

Сонымен

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\left|2^{\frac{1}{x-3}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0\right|=\frac{1}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

Сол сияқты, $x\to 3+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-3}\to +\infty.$

Сонымен

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\left|2^{\frac{1}{x-3}}=2^{+\infty}=\infty\right|=0.$$

Нүктеде үзіліссіз функцияның қасиеттері:

1) Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ теңдіктері орындалады, яғни ол x_0 нүктесінде сол жақты да, оң жақты да үзіліссіз болады;

2) Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде:

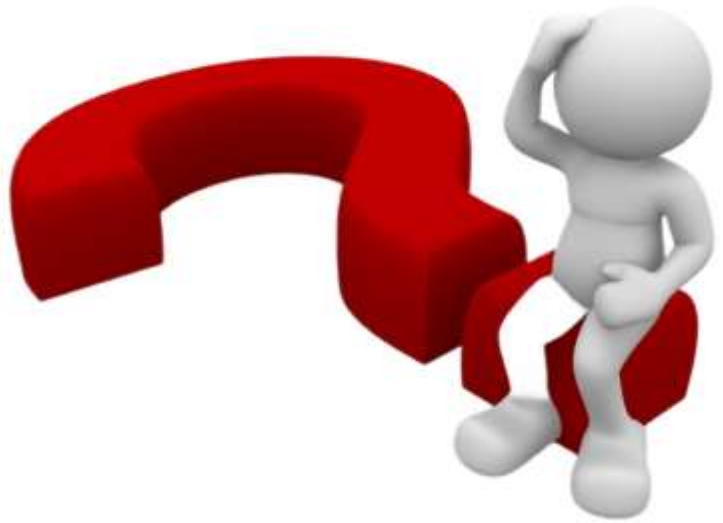
$f(x)\pm\varphi(x)$;

$f(x)\cdot\varphi(x)$;

$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ функциялары да үзіліссіз, егер $\varphi(x_0)\neq 0$ болса.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

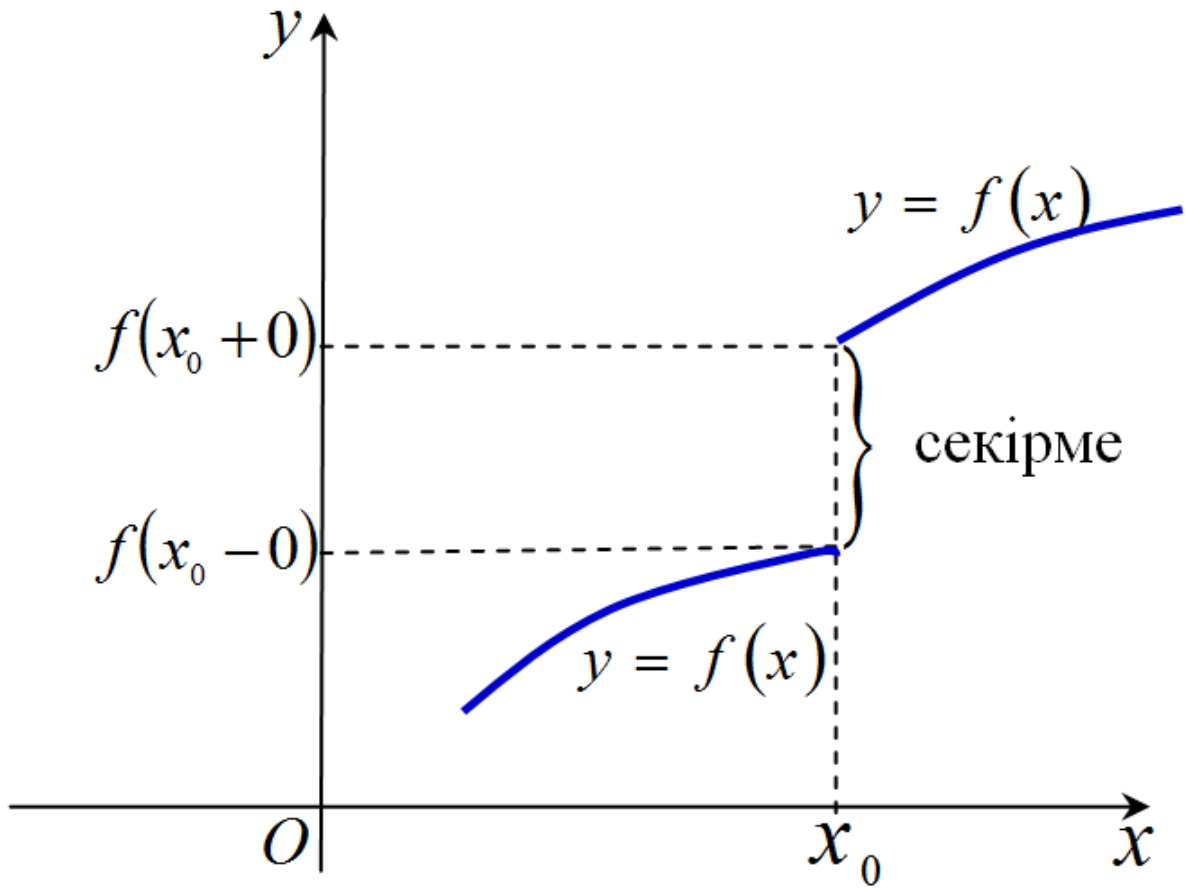
1. Функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы.
2. Үзіліссіздіктің өсімшелер тіліндегі анықтамасы.
3. Нүктеде үзіліссіз функцияның қасиеттері.



ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІС НҮКТЕЛЕРІ

Үзіліс нүктесі осы нүктедегі оң және сол жақты шектерге қарап екі текке бөлінеді.

Анықтама 5. x_0 үзіліс нүктесі *бірінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады, егер $f(x_0-0)$ және $f(x_0+0)$ бір жақты шектері санға тең болса $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ айырмасы $f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі секірмесі* деп аталады.



Мысал 8: $x=4$ нүктесінде $y=arctg\dfrac{1}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешімі:

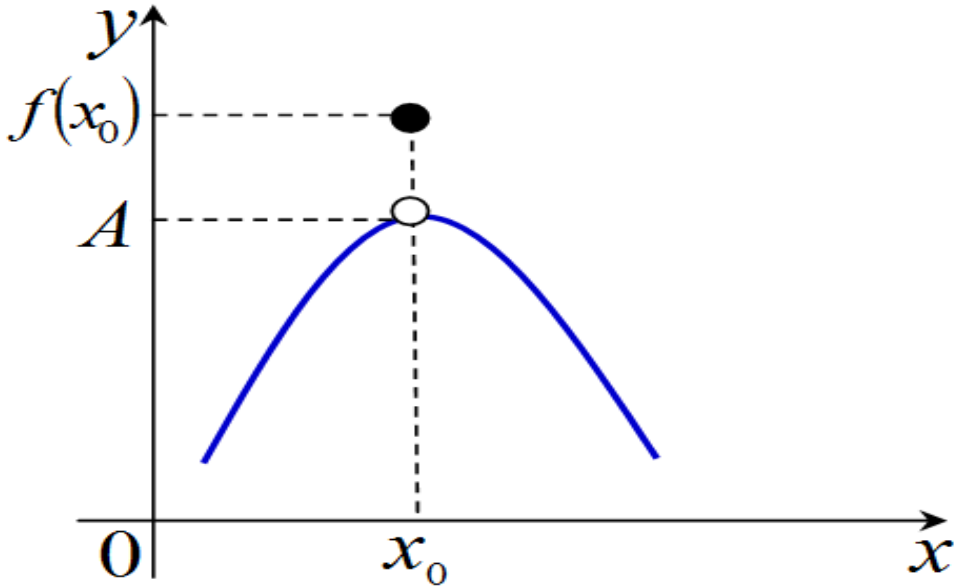
- Егер $x\to 4-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to -\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4-0} y=-\dfrac{\pi}{2}$.
- Егер $x\to 4+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to +\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4+0} y=\dfrac{\pi}{2}$.

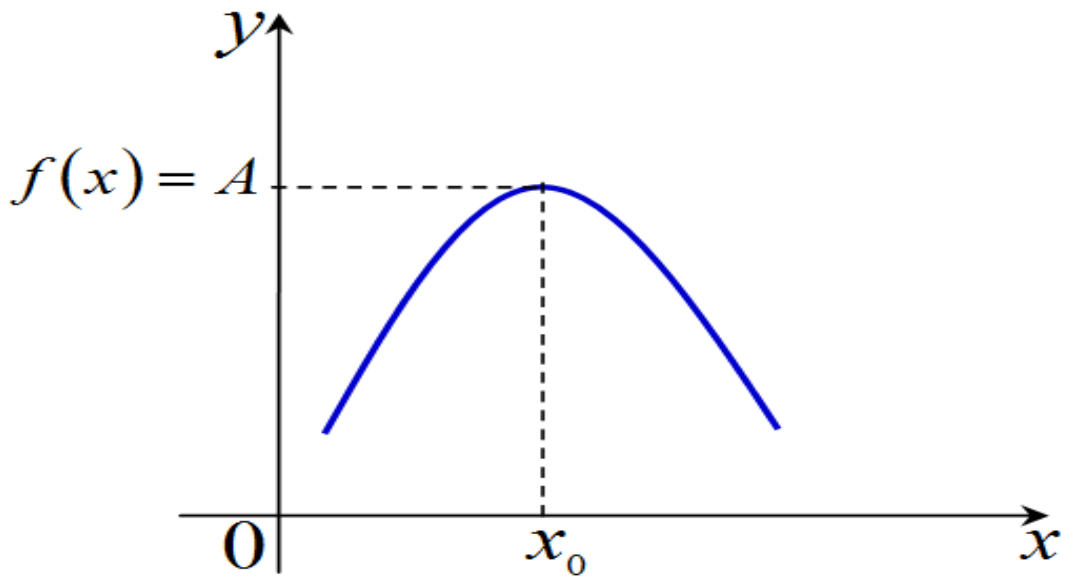
Сонымен, $x\to 4$ берілген функцияның сол жақ және оң жақ ақырлы шектері бар, бірақ олар әртүрлі.

Ендеше, $x=4$ - бірінші текті үзіліс (секіріс) нүктесі. $x=4$ нүктесінде секірмесі $\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ -ге тең.

Анықтама 6. Егер бірінші текті x_0 үзіліс нүктесінде $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ болса, онда x_0 *түзетілетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

Анықтамадан $y=f(x)$ функциясының x_0 түзетілетін үзіліс нүктесіндегі шегі бір A санына $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0+0)=A)$ тең болатыны шығады. Егер біз $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі мәні A санына тең, яғни $f(x_0)=A$ деген шарт қойсақ, онда функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.





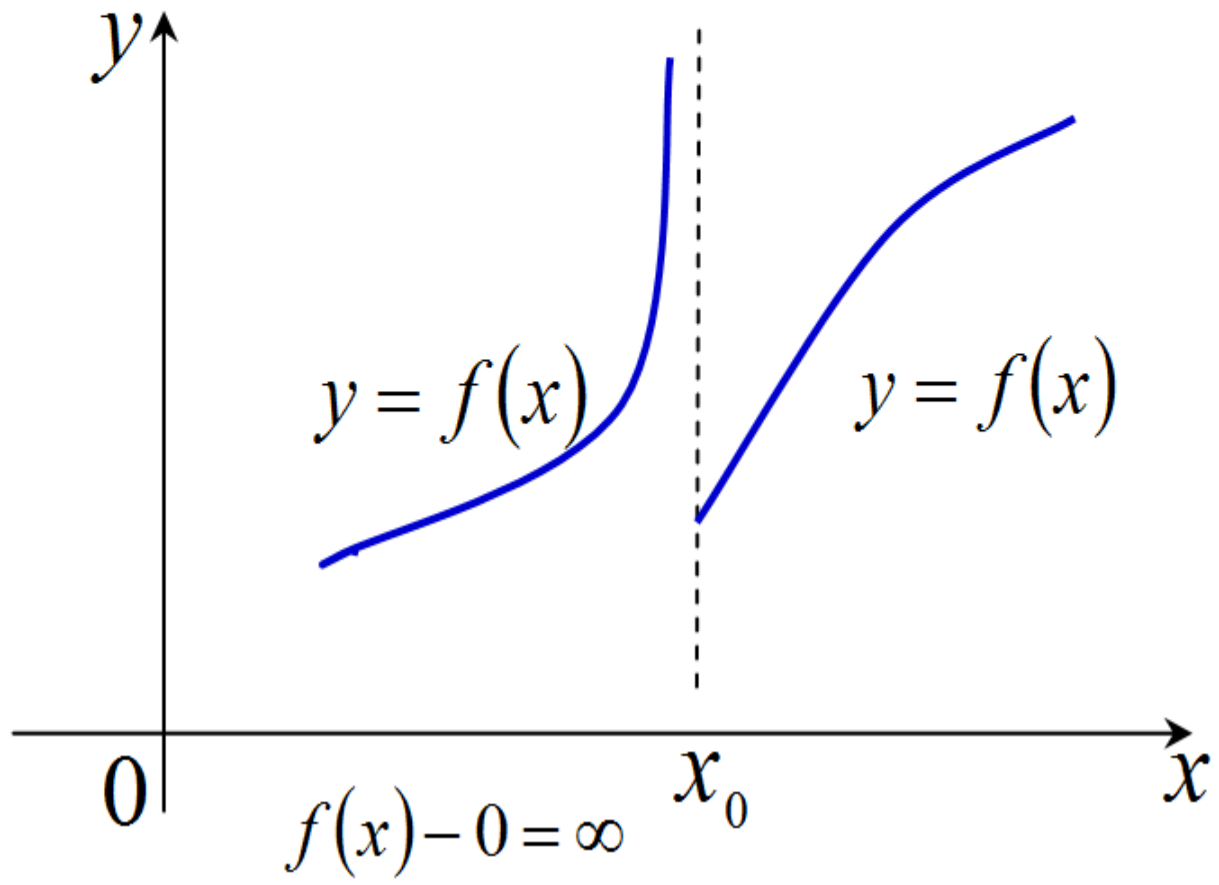
Мысал 9: $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешімі: $x=5$ нүктесінде функция анықталмайды, себебі x-тің орнына 5 қойсақ, $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Басқа нүктелерде $x-5\neq 0$ болғандықтан бөлшекті $(x-5)$-ке қысқартамыз. Сондықтан, $y=x+5$ болады. Бұдан $\lim\limits_{x\to 5-0} y=\lim\limits_{x\to 5+0} y=10.$

Сонымен, $x=5$ болғанда функция түзетілетін үзілісті болады. Егер $x=5$ болғанда $y=10$ деп ұйғарсақ функция үзіліссіз болады.

Сонда $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясы барлық x нүктесінде үзіліссіз. Мұндай функция графигі $y=x+5$ түзуі болады.

Анықтама 7. Егер функцияның x_0 үзіліс нүктесіндегі оң не сол жақты шегі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда x_0 *нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.



Мысал 10: $y=\dfrac{x}{x-4}$ функциясының $x=4$ нүктесінде үзілісті болуын көрсету керек.

Шешімі: $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty,$ яғни берілген функцияның $x\to 4$ не сол жақ, не оң жақ ақырлы шегі жоқ. Ендеше, $x=4$ - екінші текті үзіліс нүктесі болады.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Функцияның үзіліс нүктесі ұғымы.
2. Бірінші текті үзіліс нүктесінің түрлері.
3. Екінші текті үзіліс нүктесі.



АРАЛЫҚТА ҮЗІЛІССІЗ ФУНКЦИЯЛАР

Анықтама 8. *Функция* (a,b) *интервалында үзіліссіз* деп аталады, егер ол осы интервалдың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса.

Анықтама 9. Егер функция $(a;b)$ интервалында үзіліссіз және a нүктесінде оң жағынан, b нүктесінде сол жағынан үзіліссіз болса, яғни $f(a+0)=f(a)$, $f(b-0)=f(b)$ теңдіктері орындалса, онда $f(x)$ *функциясы* $[a;b]$ *кесіндісінде үзіліссіз* деп аталады.

Тұжырым. Қарапайым функция өзінің анықталу облысында үзіліссіз болады.

Ескерту. Қарапайым функцияларға негізгі қарапайым функциялар мен олардың ақырлы санды комбинациясы ретінде бір ғана түрде жазылған функциялар жатады.

Мысалы 11:

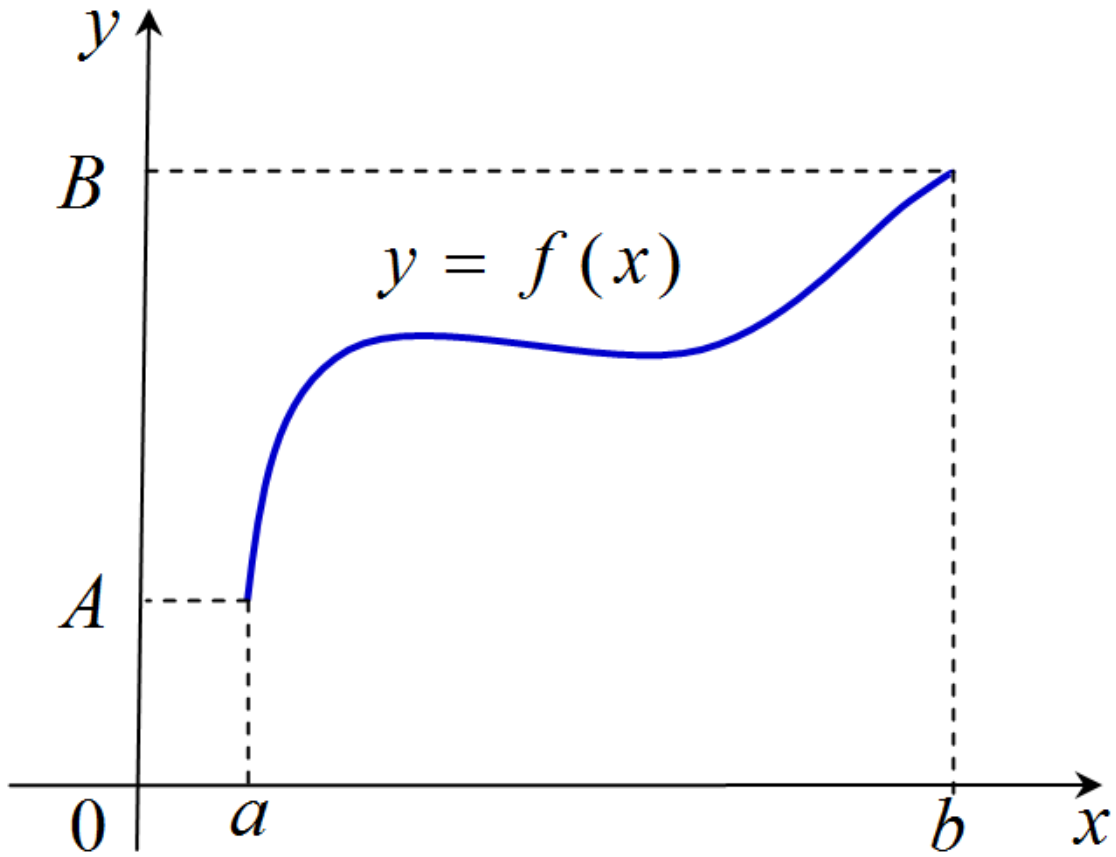
$y = x^2 + e^x$ - қарапайым функция;

$$y = \begin{cases} x^2 + e^x, \text{ егер } x \le 0 \\ \sin x, \quad \text{егер } x > 0 \end{cases}$$ - қарапайым функция емес.

D жиынында үзіліссіз функциялардың класын $C(D)$ түрінде белгілейміз.

Теоремалар (Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері)

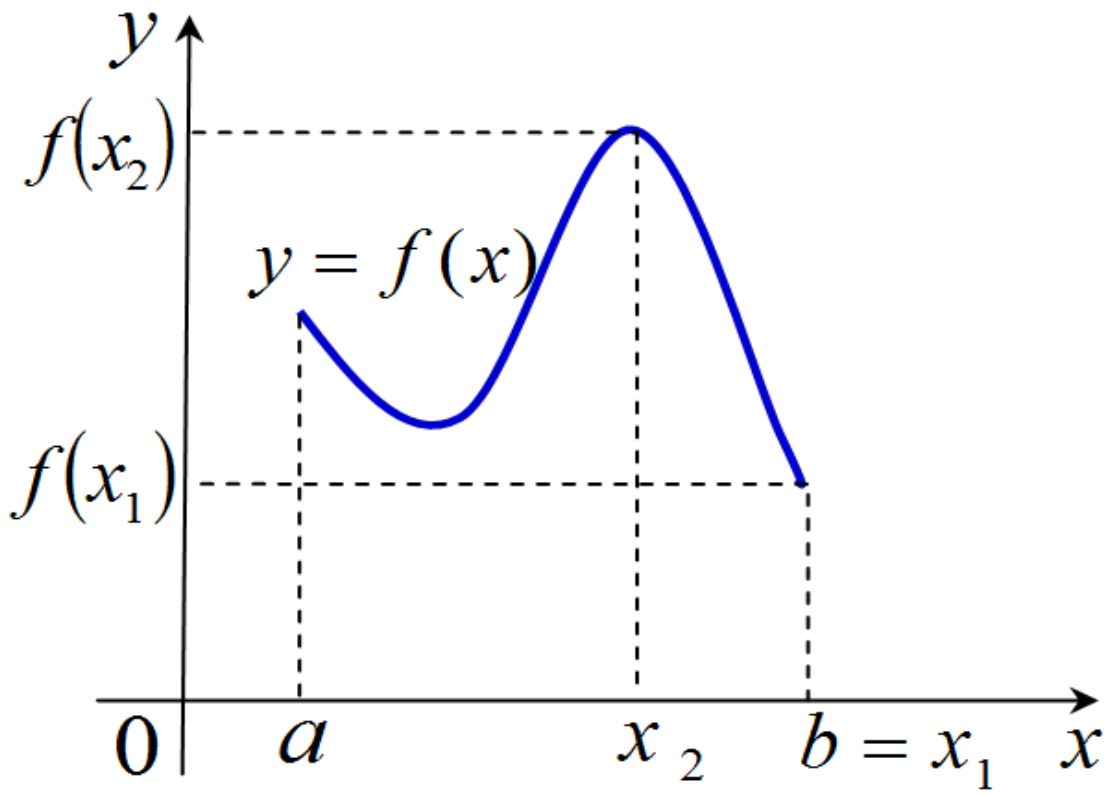
1. $f(x)\in C[a;b]\Rightarrow f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде шектелген.



$$f(x)\in C[a;b]\Rightarrow \exists A,B\in R: A\le f(x)\le B \quad \forall x\in[a;b];$$

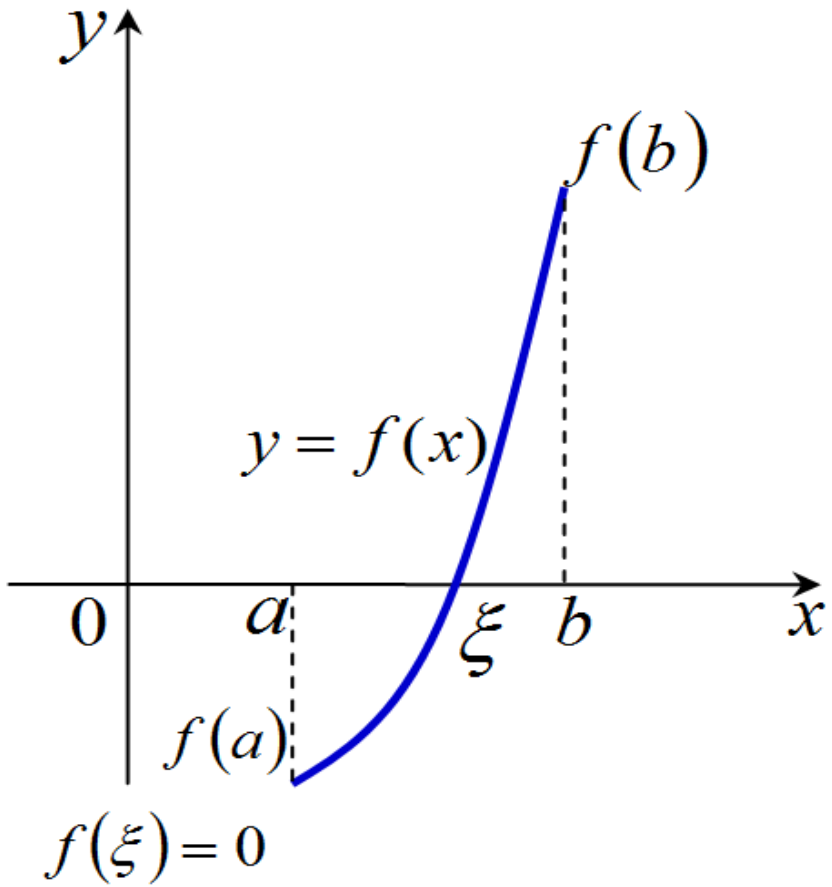
2. $f(x) \in C[a;b] \Rightarrow f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен мәні мен ең кіші мәнін қабылдайды:

$$\exists x_1, x_2 \in [a;b]: \quad f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in [a;b];$$



$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f(x), \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f(x)$$

3. $f(x) \in C[a;b]$ және оның кесіндінің ұштарындағы мәндерінің таңбалары әртүрлі $(f(a)f(b)<0)$ болса, онда $[a;b]$ *кесіндісінде* $f(\xi)=0$ теңдігі *орындалатын тым болмағанда бір* ξ *нүктесі бар болады (Больцано-Коши теоремасы)*.



ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Аралықта үзіліссіз функциялар.
2. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттерінің теоремалары.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

