Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 8

КОМПЛЕКС САНДАР

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Комплекс сандар ұғымының енгізілуі;
2. Комплекс сан және оның жиыны;
3. Комплекс сандардың айырмасы мен қатынасы;
4. Комплекс санның алгебралық пішіні (түрі) ;
5. Түйіндес комплекс сан;
6. Комплекс санның модулі;
7. Комплекс санның геометриялық кескіні және аргументі;
8. Комплекс санның тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндері;
9. Комплекс санды дәрежеге шығару және оның түбірі.

КОМПЛЕКС САНДАР ҰҒЫМЫНЫҢ ЕНГІЗІЛУІ

Комплекс сандар ұғымын бастамас бұрын, оның математикадағы енгізілу тарихына тоқтала кеткенді жөн көрдік.

Элементтері сандар болатын жиын *сандық жиын* деп аталған, олардың түрлерін және амалдарын қайталасақ:

Алғашқы енгізілгені

$$N = \{1;2;3;...;n;...\}$$

натурал сандар жиыны - қандай да бір объектінің нөмірі немесе объектілердің саны ретінде қабылдауға болатын сандар жиыны.

N жиынында $x+n=n$ түріндегі теңдеудің шешімі бола бермейді, мысалы, N жиынында $x+5=5$ теңдеуінің шешімі жоқ. Сондықтан N натурал сандар жиынын 0 санымен толықтыру қажеттілігінен

$$Z_0 = \{0;1;2;3;...;\ n;...\}$$

теріс емес бүтін сандар жиыны ұғымы енгізілді.

Z_0 жиынында $x+n=0, n\in N$ теңдеуінің шешімі жоқ. Сондықтан Z_0 жиынын натурал сандарға қарама-қарсы сандармен толықтыру қажеттілігінен

$$Z=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;...;\pm n;...\}$$

бүтін сандар жиыны ұғымы енгізілді.

Z жиында $nx=m$ түріндегі теңдеудің шешімі болмауы мүмкін, мысалы, $3x=2$ теңдеуінің Z жиынында шешімі жоқ. Сондықтан Z жиынын

$$Q=\left\{\frac{m}{n};\, m\in Z,\, n\in N\right\}$$

рационал сандардың жиынына (жай бөлшек түрінде жазылатын сандарға) дейін толықтыру қажет. Кез келген бүтін сан жай бөлшек түрінде жазылатындықтан (мысалы, $3=\frac{6}{2}$, бүтін саны да рационал санға жатады: $Z\subset Q$).

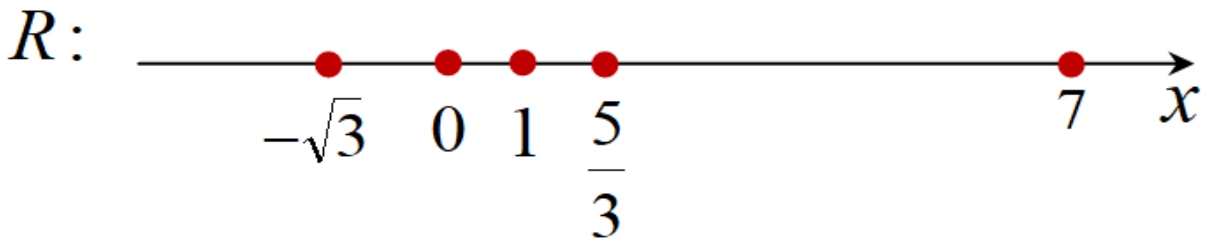
Кез келген жай бөлшекті периодты ондық бөлшекке айналдыруға болатындықтан рационал сандар жиынын периодты ондық бөлшектер жиыны ретінде қарастыруға болады:

Q - периодты ондық бөлшектер жиыны.

Q жиынында, мысалы, $x^2 = 2$ теңдеуінің шешімі жоқ, себебі квадраты екіге тең рационал сан, яғни периодты ондық бөлшек жоқ.

Сондықтан I *иррационал сандар жиынын* (периодсыз шексіз ондық бөлшек түріндегі сандарды) енгізу қажет.

$x^2 = -3$ теңдеуінің R жиынында шешімі жоқ (квадраты теріс болатын нақты сан жоқ). Нақты сандар жиынын кеңейту қажет. R нақты сандар жиынының геометриялық кескіні сан өсі, яғни бас нүктесі, оң бағыты және бірлік (эталондық) кесіндісі берілген түзу (1-сурет):



1-сурет

R нақты сандар жиынын кеңейту - Ox өсінің нүктелерінің жиынын Oxy жазықтығының нүктелерінің жиынына, яғни нақты сандардың реттелінген жұптарының

$$R^2 = \{(x, y) : x, y \in R, (x, y) \neq (y, x)\}$$

жиынына дейін кеңейту.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс сандар ұғымының қажеттілігін атаңыз.
2. R нақты сандар жиынын кеңейту.



КОМПЛЕКС САН ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖИЫНЫ

Нақты сандар жиыны – қосу, көбейту амалдары мен реттілік қатынастары («$\le$», «$\ge$») енгізілген жиын. R^2 жиынына қосу, көбейту амалдары мен «$\le$», «$\ge$» қатынастарын енгізу:

1) Қосу амалы

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2) \qquad (1)$$

2) Көбейту амалы

$$(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) \qquad (2)$$

3) Реттілік қатынастары

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$$

«$(x_1,y_1)<(x_2,y_2)$», «$(x_1,y_1)>(x_2,y_2)$» қатынастарын енгізу мүмкін емес. R^2 жиыны – нақты сандар жиыны емес, яғни (x,y) – нақты саннан өзгеше сан:

(x,y) жұбы - екі нақты саннан тұратын комплекс, бұдан (x,y) жұбы – *сандар комплексі.*

Анықтама 1. Қосу және көбейту амалы енгізілген R^2 жиынын - *комплекс сандар жиыны* деп атап C әрпімен белгілейміз:

$$C = \{(x, y) : x, y \in R, (x, y) \neq (y, x)\}.$$

Комплекс сандар жиынының элементі (x, y) – комплекс сан.

Комплекс сан деп нақты сандардың реттелінген (x, y) жұбы аталады.

Әдетте, комплекс сан z әрпімен белгіленеді:

$$z = (x, y).$$

Мысал 1:

$$(x,y)=(-7,11)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\y=11.\end{cases}$$

Мысал 2: $(-5,9)\neq(9,-5).$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс сан ұғымы.
2. Комплекс сандар жиыны ұғымы, белгіленуі.
3. Комплекс сандарының теңдігі ұғымы, мысал.
4. Комплекс сандар жиынындағы реттілік.



КОМПЛЕКС САНДАРДЫҢ АЙЫРМАСЫ МЕН ҚАТЫНАСЫ

Алдымен «Қосынды» мен «Көбейтінді» анықтамалары енгізіледі де (олар дәрісте енгізіліп қойылған), сонан соң осы ұғымдар арқылы «айырма» мен «қатынас» анықтамалары енгізіледі:

- жиынның a, b *элементтерінің айырмасы* деп $b + c = a$ теңдігін қанағаттандыратын c элементін айтамыз да, $a - b$ түрінде белгілейміз;
- жиынның a, b *элементтерінің қатынасы* деп $b \cdot c = a$ теңдігін қанағаттандыратын c элементін айтамыз да, $\frac{a}{b}$ түрінде белгілейміз.

1) Айырма

Айырманың анықтамасы бойынша $z_1 = z(x_1, y_1),\ z_2 = z(x_2, y_2)$ *комплекс сандарының айырмасы* деп $z + z_2 = z_1$ теңдігін қанағаттандыратын $z = (x, y)$ комплекс саны аталады да $z_1 - z_2$ түрінде белгіленеді:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \qquad (3)$$

Бұл теңдіктің қалай алынатынын көрсетсек:

$$z + z_2 = z_1 \Leftrightarrow (x,y) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow (x + x_2, y + y_2) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x_2 = x_1,\ y + y_2 = y_1 \Leftrightarrow x = x_1 - x_2,\ y = y_1 - y_2 \Rightarrow$$

$$z = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \Rightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

2) Қатынас

Қатынастың анықтамасы бойынша $z_1 = z(x_1, y_1), z_2 = z(x_2, y_2)$ комплекс сандарының қатынасы деп $z \cdot z_2 = z_1$ теңдігін қанағаттандыратын $z = (x, y)$ комплекс саны аталады да $\frac{z_1}{z_2}$ түрінде белгіленеді:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \; x_2^2 + y_2^2 \neq 0 . \qquad (4)$$

ӨЗІНДІК ЖҰМЫС

Тәжірибелік сабаққа бұл формуланы жоғарыдағыдай негіздеп келу керек.

Мысал 3: $z_1=(2,-5), z_2=(3,8)$ сандары берілген. $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1\cdot z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$ сандарын табыңыз.

Шешімі:

$$(1)\Rightarrow z_1+z_2=(2,-5)+(3,8)=(2+3,-5+8)=(5,3);$$

$$(3)\Rightarrow z_1-z_2=(2,-5)-(3,8)=(2-3,-5-8)=(-1,-13);$$

$$(2)\Rightarrow z_1\cdot z_2=(2,-5)\cdot(3,8)=(2\cdot 3-(-5)\cdot 8, 2\cdot 8+3(-5))=(46,1);$$

$$(4)\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{(2,-5)}{(3,8)}=\left(\frac{2\cdot 3+(-5)\cdot 8}{3^2+8^2}, \frac{3(-5)-2\cdot 8}{3^2+8^2}\right)=\left(-\frac{34}{73}, -\frac{31}{73}\right).$$

Егер C комплекс сандар жиынының $\{(a,0)|a\in R\}$ ішкі жиынына «$(x_1,0)<(x_2,0)\Leftrightarrow x_1<x_2$ болса» реттілік қатынасын енгізсек, онда R нақты сандар жиынын $\{(a,0)|a\in R\}$ жиынына бейнелейтін $a\mapsto(a,\ 0)$ бейнелеуі арифметикалық амалдар мен реттілік қатынасты сақтайтын, яғни

$$(x_1\mapsto(x_1,0),\ \ x_2\mapsto(x_2,0)\Rightarrow$$
$$x_1+x_2\mapsto(x_1,0)+(x_2,0),$$
$$x_1\cdot x_2\mapsto(x_1,0)\cdot(x_2,0),$$
$$(x_1,0)<(x_2,0)\Leftrightarrow x_1<x_2$$

шарттарын қанағаттандыратын биекция (өзара бірмәнді сәйкестік) болғандықтан, $\{(a,0)|a\in R\}$ жиынын нақты сандар жиыны ретінде қарастыруға, яғни

$\{(a,0)|a\in R\}=R$ және $(a,\ 0)=a$

деп ұйғаруға болады. Онда, $\{(a,0)|a\in R\}$ жиыны комплекс сандар жиынының ішкі жиыны болғандықтан, R нақты сандар жиынын C комплекс сандар жиынының ішкі жиыны ретінде қарастыруға болады: $R\subset C$.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс сандарының қосындысы және белгіленуін көрсетіңіз.
2. Комплекс сандарының көбейтіндісі және белгіленуін көрсетіңіз.
3. Комплекс сандарының айырмасы және белгіленуін көрсетіңіз.
4. Комплекс сандарының қатынасы және белгіленуін көрсетіңіз.
5. Комплекс сандар жиынының ішкі жиыны.



КОМПЛЕКС САННЫҢ АЛГЕБРАЛЫҚ ПІШІНІ (ТҮРІ)

$(0,1)$ санын i әрпімен белгілейміз: $(0,1)=i$.

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)$$

теңдігі мен $(a,\ 0)=a$ теңдігінен, кез келген $z=(x,y)$ комплекс санының

$$z=x+iy$$

түріндегі жалғыз $i=(0,1)$ комплекс саны арқылы өрнектелуін аламыз.

Тек арифметикалық амалдар арқылы құрылған өрнек *алгебралық өрнек* деп аталатындықтан, комплекс санның $z=x+iy$ түрінде жазылуы *комплекс санның алгебралық пішіні* деп аталады.

Мысал 4:

$$(12,13)(25,8)=(12+13i)(25+8i)=12\cdot 25+(12\cdot 8+13\cdot 25)i+13\cdot 8(i\cdot i),$$

мұндағы $12\cdot 25, 12\cdot 8+13\cdot 25, 13\cdot 8$ – өзімізге белгілі нақты сандардың қосындылары мен көбейтінділері, $i\cdot i$ – жалғыз комплекстік көбейтінді:

$$i\cdot i=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

x нақты саны $z = x + iy$ *комплекс санының нақты бөлігі* деп аталып $x = \mathrm{Re} z$ немесе $x = \Re(z)$ түрінде белгіленеді (француздың «reelle-нақты» деген сөзінен алынған), y нақты саны $z = x + iy$ *комплекс санының жорамал бөлігі* деп аталып $y = \mathrm{Im}\, z$ немесе $y = \Im(z)$ түрінде белгіленеді (француздың «imaginaire - жорамал» деген сөзінен алынған).

Алғаш рет математика тарихына *«комплекс сан»* атауын 1777-1855 жылдары өмір сүрген неміс математигі, астроном, физигі **Карл Фридрих Гаусс**,





ал i *белгісін (жорамал бірлікті)* 1707-1783 жылдарда ғұмыр кешкен швейцар философы, математигі, әрі механик және физигі **Леонард Эйлер** енгізген.

Мысал 5:

$z_1 = -6, \quad z_2 = 5, \quad z_3 = -8i, \quad z_4 = i, \quad z_5 = -7 + 2i, \quad z_6 = 3 - i$ комплекс сандары берілсін. Әрбір санның нақты және жорамал бөліктерін көрсетіңіз де оларды $z = x + iy$ алгебралық түрінде жазыңыз.

Шешімі:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\ z_1 = -6, && \mathrm{Im}\ z_1 = 0, && z_1 = -6 + i \cdot 0,\\
&\mathrm{Re}\ z_2 = 5, && \mathrm{Im}\ z_2 = 0, && z_2 = 5 + i \cdot 0,\\
&\mathrm{Re}\ z_3 = 0, && \mathrm{Im}\ z_3 = -8, && z_3 = 0 + i \cdot (-8),\\
&\mathrm{Re}\ z_4 = 0, && \mathrm{Im}\ z_4 = 1, && z_4 = 0 + i \cdot 1,\\
&\mathrm{Re}\ z_5 = -7, && \mathrm{Im}\ z_5 = 2, && z_5 = -7 + i \cdot 2,\\
&\mathrm{Re}\ z_6 = 3, && \mathrm{Im}\ z_6 = -1, && z_6 = 3 + i \cdot (-1).
\end{aligned}$$

Мысал 6:

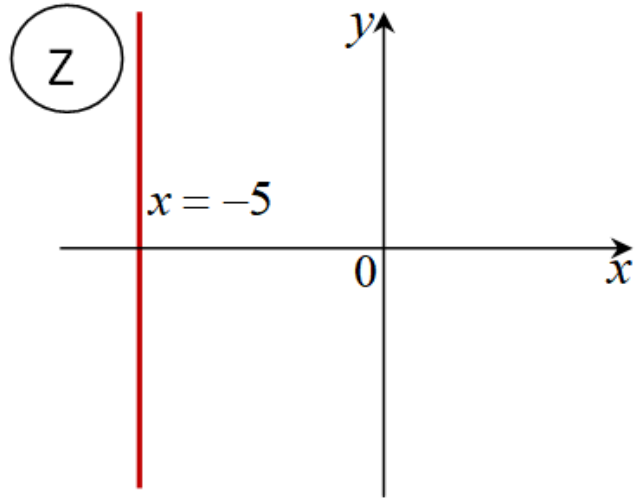
1) $\operatorname{Re} z = -5$,
2) $2 \le \operatorname{Im} z \le 4$,
3) $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = 3$,
4) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 9$

шарттарымен анықталатын комплекс айнымалыны кескіндейтін нүктелер жиынын анықтау керек.

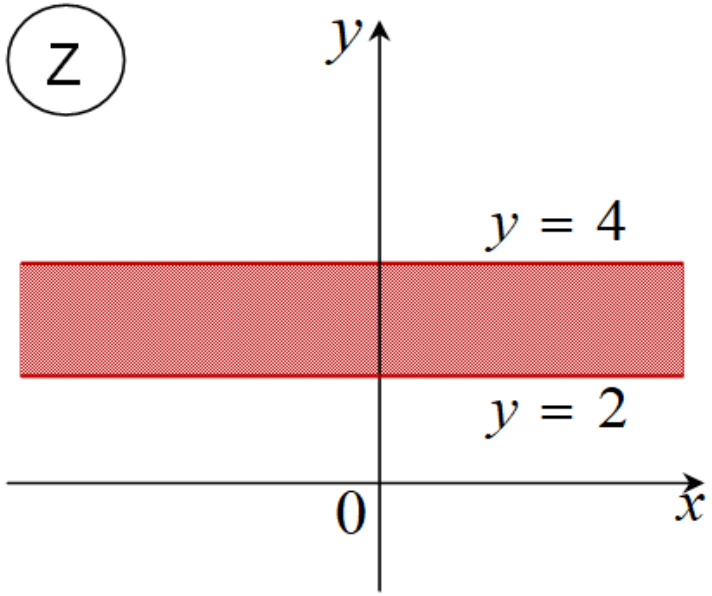
Шешімі:

1) $\mathrm{Re}z=-5 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+iy)=-5 \Leftrightarrow x=-5 \Rightarrow$

$\mathrm{Re}z=-5$ шартын қанағаттандыратын комплекс сандар жиыны жазықтықтың $x=-5$ түзуін береді (2-сурет).



2-сурет



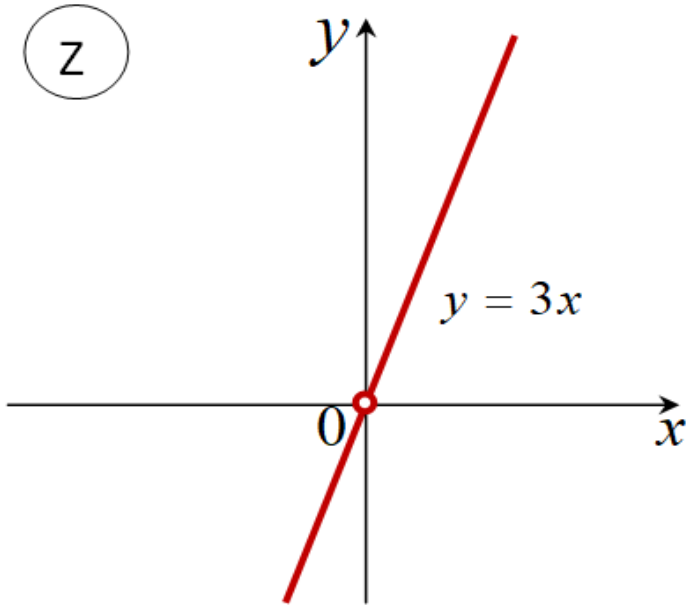
3-сурет

2) $2 \le \mathrm{Im}z \le 4 \Leftrightarrow 2 \le \mathrm{Im}(x+iy) \le 4 \Leftrightarrow 2 \le y \le 4 \Rightarrow$

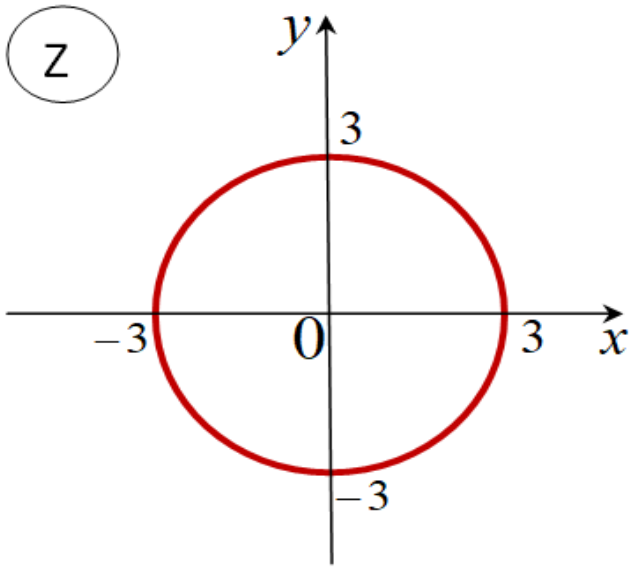
$2 \le \mathrm{Im}\ z \le 4$ шартын қанағаттандыратын комплекс сандар жиыны жазықтықтың $y=2$, $y=4$ түзулері мен осы түзулердің арасында жатқан нүктелерінің жиынын береді (3 - сурет).

3) $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow y = 3x,\ x \neq 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = 3$ шартын қанағаттандыратын комплекс сандар жиыны жазықтықтың $y = 3x$ түзуінің $O(0,0)$ нүктесінен өзге нүктелерінің жиынын береді (4-сурет).



4-сурет



5-сурет

4) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow$

- центрі $O(0,0)$ нүктесі, радиусы 3 – ке тең шеңбер (5 - сурет).

Мысал 7: 3-мысалдағы $z_1=(2,-5),\quad z_2=(3,8)$ сандарының қосындысын, айырмасын, көбейтіндісін және қатынасын олардың $z=x+iy$ түріндегі жазылуын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$$z_1+z_2=(2+i(-5))+(3+i8)=(2+3)+i(-5+8)=5+3i,$$

$$z_1-z_2=(2+i(-5))-(3+i8)=(2-3)+i(-5-8)=-1-13i,$$

$$z_1\cdot z_2=(2+i(-5))\cdot(3+i8)=2\cdot 3+2\cdot i8+i(-5)\cdot 3+i^2(-5)8=$$

$$=6+16i-15i+40=46+i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i(-5)}{3+i8}=\frac{(2+i(-5))(3-i8)}{(3+i8)(3-i8)}=$$

$$=\frac{2\cdot 3+2\cdot(-i8)+i(-5)\cdot 3+i^2(-5)(-8)}{3^2+8^2}=$$

$$=\frac{6-16i-15i+40i^2}{73}=\frac{-34-31i}{73}=-\frac{34}{73}-\frac{31i}{73}.$$

Мысал 8: $(2+i)x+(7-4i)y=15+5i$ теңдеуінің шешімін табыңыз.

Шешімі: Теңдеудің сол жағын алгебралық түрде жазып аламыз:

$$(2x+7y)+i(x-4y)=15+5i.$$

Бұдан екі комплекс санның теңдігінің белгісіне сүйеніп

$$\begin{cases} 2x+7y=15, \\ x-4y=5 \end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Жүйенің шешімі

$$\begin{cases} x=\dfrac{19}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Олай болса берілген теңдеудің шешімі $z=\dfrac{19}{3}+\dfrac{1}{3}i$ саны болады.

i санына қатысты оның дәрежелерін қарастырсақ:

i $\qquad\qquad$ $i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^2 = -1$ $\qquad\qquad$ $i^6 = (i^2)^3 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\qquad\qquad$ $i^7 = i^6 \cdot i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $i^8 = (i^2)^4 = 1$

$(i; -1; -i; 1)$ сандары циклдік түрде қайталанып тұрады. $i^2 = -1$ теңдігін ескере отырып кез келген натурал k үшін келесі дәрежелерді анықтауға болады:

$$i^{4k} = (i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = 1;$$

$$i^{4k+1} = i^{4k} i = 1 \cdot i = i;$$

$$i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = 1 \cdot (-1) = -1;$$

$$i^{4k+3} = i^{4k} i^2 i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i;$$

$$i^{4k+n} = i^n.$$

Мысал 9: i^{2022} дәрежесін есептеп көрсетіңіз.

Шешімі: $i^{4k+n} = i^n$ дәрежелерді анықтау формуласын қолдансақ:

$$i^{2022} = i^{4 \cdot 505 + 2} = i^2 = -1.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

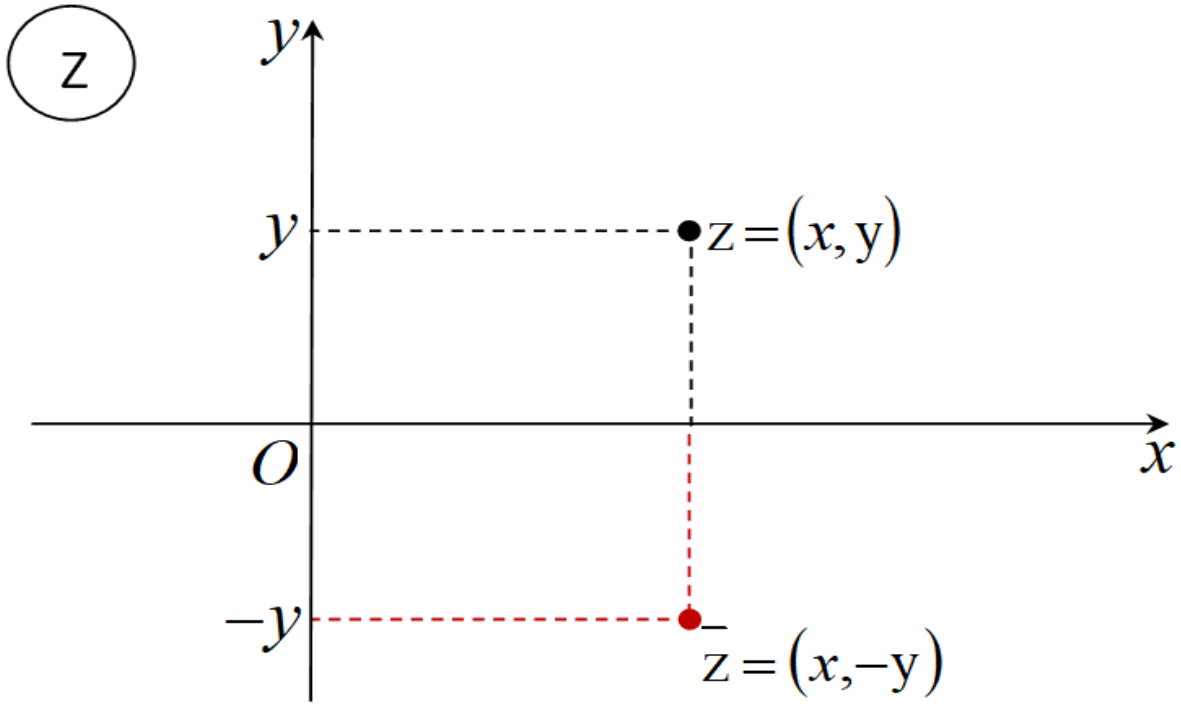
1. Комплекс санның алгебралық пішіні.
2. Комплекс санының нақты бөлігі, белгіленуі.
3. Комплекс санының жорамал бөлігі, белгіленуі.
4. Кез келген натурал k үшін i санына қатысты оның дәрежелерін айқындау, мысал.



ТҮЙІНДЕС КОМПЛЕКС САН

Анықтама 2. $\bar{z} = x - iy$ комплекс саны $z = x + iy$ комплекс санына *түйіндес сан* деп аталады.

$z = (x, y)$ *және* $\bar{z} = (x, -y)$ *түйіндес сандары* Ox *өсіне қатысты симметриялы* орналасады (6-сурет).



6-сурет

Мысал 10: Берілген комплекс сандардың түйіндес сандарын табу керек.

Шешімі:

$z_1 = 2 + i;$ $\quad \bar{z}_1 = 2 - i;$

$z_2 = 8i;$ $\quad \bar{z}_2 = -8i;$

$z_3 = -5i - 7;$ $\quad \bar{z}_3 = 5i - 7;$

$z_4 = 10;$ $\quad \bar{z}_4 = 10.$

Тұжырым 1. $z, w \in C$ болсын. Түйіндестік келесі қасиеттерге ие:

1. $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \ \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i};$
2. $\overline{(\bar{z})} = z;$
3. $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} = z; \ z \in iR \Leftrightarrow \bar{z} = -z;$
4. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w};$
5. $\Re(z+w) = \Re(z) + \Re(w); \quad \Im(z+w) = \Im(z) + \Im(w);$
6. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w};$
7. $z\bar{z} = |z|^2;$
8. $z \neq 0 \Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2};$
9. $z \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}.$

Мысал 11: Түйіндестіктің 1, 2, 6, 7 қасиеттерін дәлелдеу керек.

1-қасиетін дәлелдеу: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ және $\mathrm{Re}\, z = x$ болсын.
$z + \bar{z}$ қосындысын табу.

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z,$$

$$\mathrm{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Енді айырмасын табайық:

$$z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\, z,$$

$$\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

2-қасиетін дәлелдеу: $z = x + iy$, $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ болсын.

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{\left(\overline{x + iy}\right)} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

6-қасиетін дәлелдеу:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \bar{z}_1 = x_1 - iy_1, \quad \bar{z}_2 = x_2 - iy_2$$

болсын.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Демек,

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - (-y_1)(-y_2)) + (x_1(-y_2) + x_2(-y_1))i =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

7-қасиетін дәлелдеу: $z = x + iy, \ \bar{z} = x - iy$ болсын.

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

ӨЗІНДІК ЖҰМЫС

Түйіндестіктің 3-5 және 8, 9 қасиеттерін өздік жұмыс түрінде дәлелдеу керек.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Өзара түйіндес комплекс сандар ұғымы, геометриялық кескіні.
2. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттерін атаңыз.
3. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттерінің дәлелдеулері.



КОМПЛЕКС САННЫҢ МОДУЛІ

Анықтама 3. $z=(x,y)=x+iy$ санының *модулі* деп

$$\rho = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (5)$$

санын айтамыз.

Комплекс санның модулінің өзімізге бұрыннан танымал нақты санның модулі ұғымымен байланысын қарастырамыз. Кез келген *нақты санның модулі*

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Кез келген $a \in R$ нақты санын

$$z = a + 0 \cdot i$$

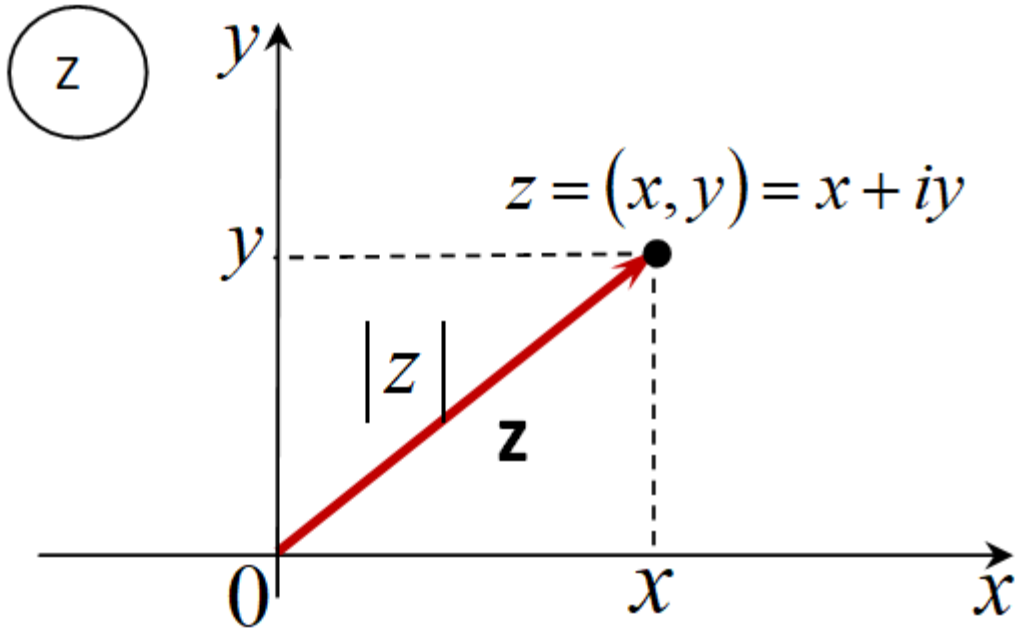
комплекс саны түрінде жаза аламыз, ал оның модулі

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} \Rightarrow$$

квадрат түбірдің анықтамасы бойынша

$$|z| = |a|.$$

Модуль ұғымының геометриялық кескінделуіне (интерпретациясына) тоқталсақ, z комплекс санының модулі z векторының ұзындығын береді (7-сурет).



7-сурет

Мысал 12:

$$z_1 = 3 + 4i,$$

$$z_2 = -\frac{11}{i},$$

$$z_3 = i(i - 3),$$

$$z_4 = \frac{i - 2}{i}$$

комплекс сандарының модулін есептеңіз.

Шешімі:

1) $z_1 = 3 + 4i$ комплекс санының модулі

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5;$$

2) $z_2 = -\frac{11}{i}$ комплекс санына түрлендіру енгізсек

$z_2 = -\frac{11}{i} = -\frac{11i}{i^2} = -\frac{11i}{-1} = 11i,$ онда оның модулі $|z_2| = \sqrt{0^2 + 11^2} = 11;$

3) $z_3 = i(i-3)$ комплекс санын алгебралық түрде жазып аламыз

$z_3 = i(i-3) = i^2 - 3i = -1 - 3i$, онда оның модулі $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10};$

4) $z_4 = \frac{i-2}{i}$ комплекс санын алгебралық түрде жазып аламыз

$z_4 = \frac{i-2}{i} = 1 - \frac{2}{i} = 1 - \frac{2i}{i^2} = 1 + 2i$, онда оның модулі $|z_4| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

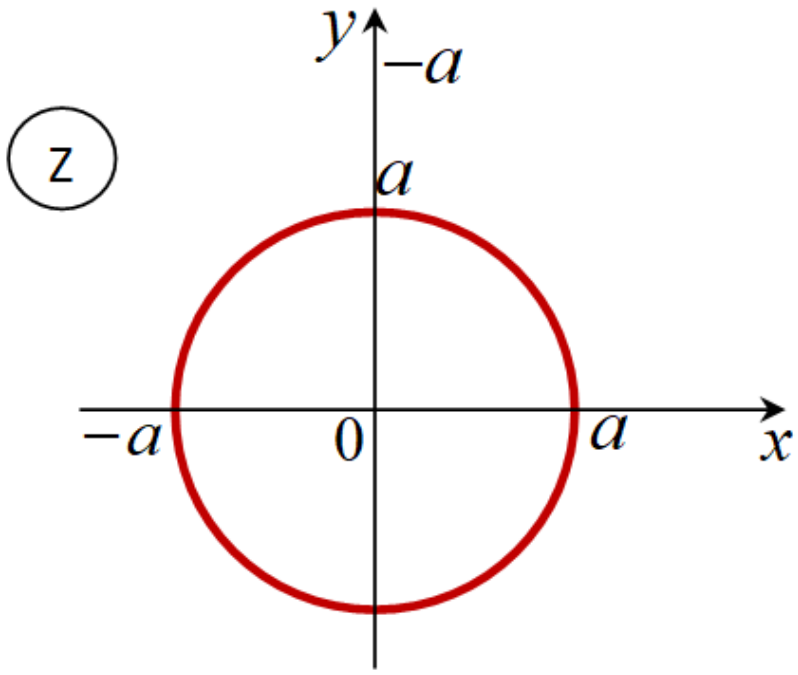
Тұжырым 2. $z,w\in C$ болсын. Модуль келесі қасиеттерге ие:

1) $|z|=0\Leftrightarrow z=0;$

Модуль теріс сан болмайды, яғни $|z|\geq 0.$

$|z|=a\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=a\Leftrightarrow x^2+y^2=a^2$

$|z|=a$ центрі $O(0,0)$ нүктесі, радиусы *a* болатын шеңбердің теңдеуі (8-сурет).



8-сурет

2) $z=x+yi$

$-z=-x-yi$ сандары үшін $|z|=|-z|=|\bar{z}|;$

$\bar{z}=x-yi$

3) $\Re(z) \le |z|$ және $\Im(z) \le |z|$;

4) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$;

$$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$z\bar{z} = |z|^2,$$

бұдан z санына кері сан

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

саны болатыны шығады.

Сондай-ақ, $|z| < 0$ болуы мүмкін емес екенін және $z = 0 + 0i$ комплекс саны үшін $|z| = 0$ ескеру қажет.

5) $|zw| = |z||w|$;

6) $|z^n| = |z|^n$;

7) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, егер $w \neq 0$ болса;

8) $|z + w| \leq |z| + |w|$ - C жиынындағы үшбұрыш теңсіздігі;

9) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$;

10) Кез келген $z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплекс сандары үшін нақты сандар жағдайындай келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|;$$

Бұл теңсіздік *жалпыланған үшбұрыш теңсіздігі* деп аталады.

11) $|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = \lambda w$ немесе $w = \lambda z$ теңдігі орындалатындай $\lambda \in \mathrm{R}$ саны бар болса;

12) $|z_1 - z_2|$ - берілген z_1 және z_2 сандарының ара қашықтығы.

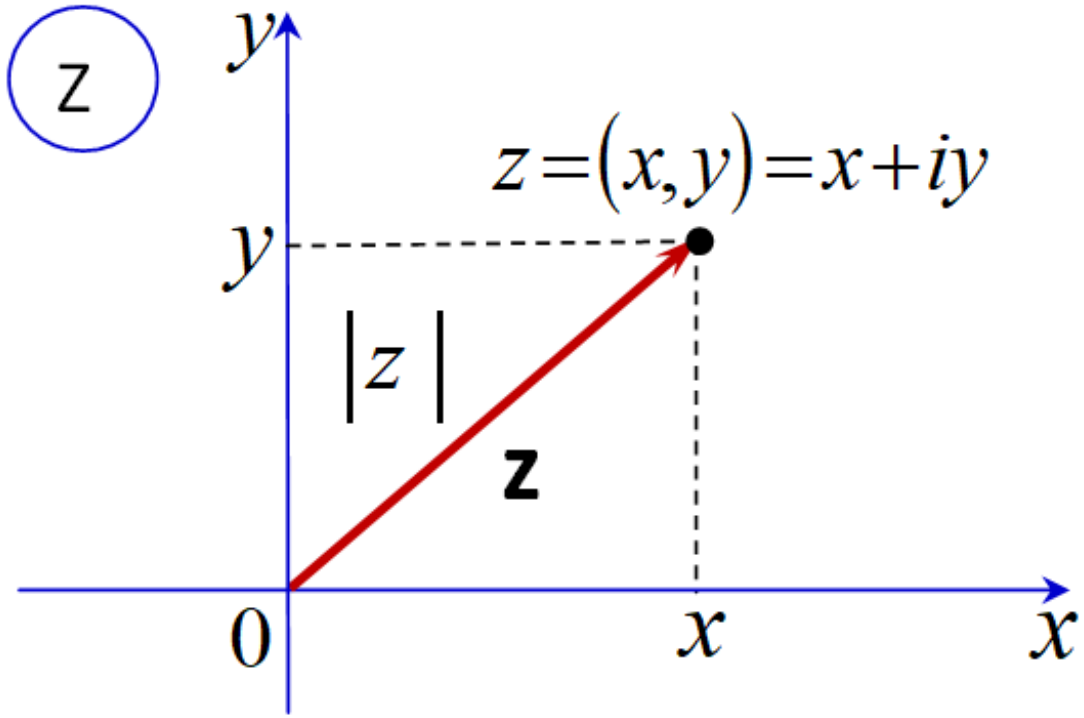
ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс санның модулі ұғымы, есептелуі.
2. Комплекс санның модулінің геометриялық кескінделуі.
3. Нақты санның модулі ұғымымен байланысы.
4. Модульдің қасиеттері, дәлелдеулері.



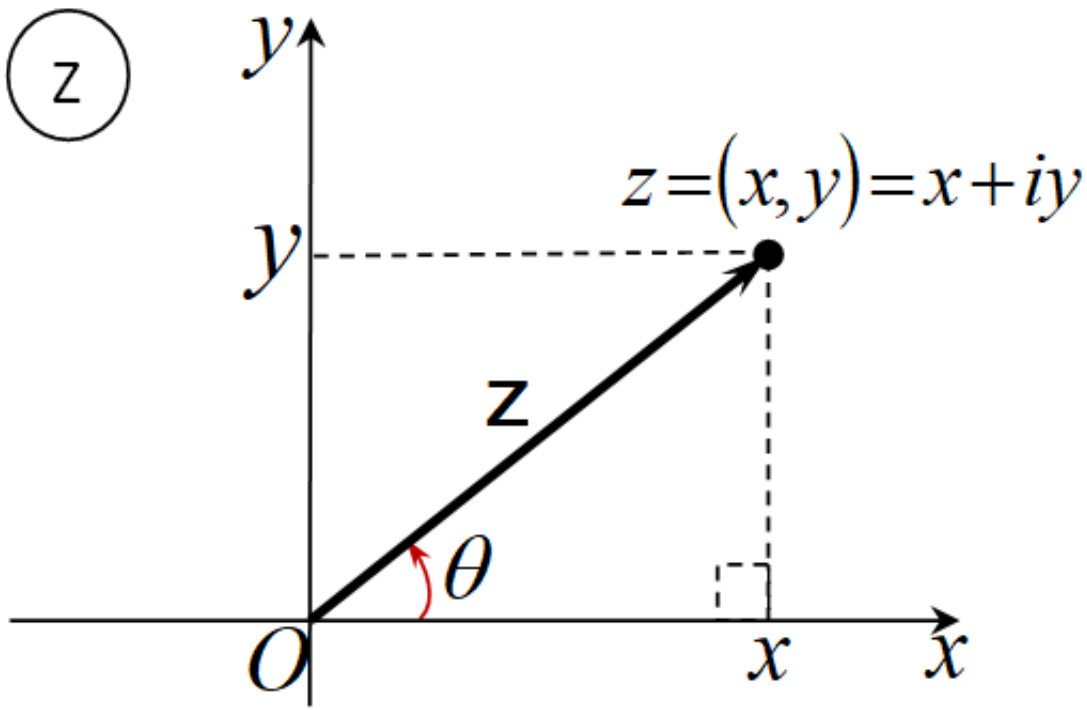
КОМПЛЕКС САННЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ КЕСКІНІ ЖӘНЕ АРГУМЕНТІ

Кез келген $z=(x,y)=x+iy$ санын xOy жазықтығының (x,y) нүктесі немесе $\mathbf{z}=(x,y)$ векторы ретінде қарастыруға болады, мұндағы xOy жазықтығы *комплекс жазықтық* (z *жазықтығы* немесе *комплекс сандар жазықтығы*), Ox өсі *нақты өс*, Oy өсі *жорамал өс* деп аталады (9-сурет).



9-сурет

Анықтама 4. z *санының аргументі* деп Ox өсін z санын кескіндейтін **z** векторының бағытымен беттестіру үшін бұратын бұрышты айтамыз. z санының аргументін $Arg\ z$ түрінде белгілейміз (10-сурет).

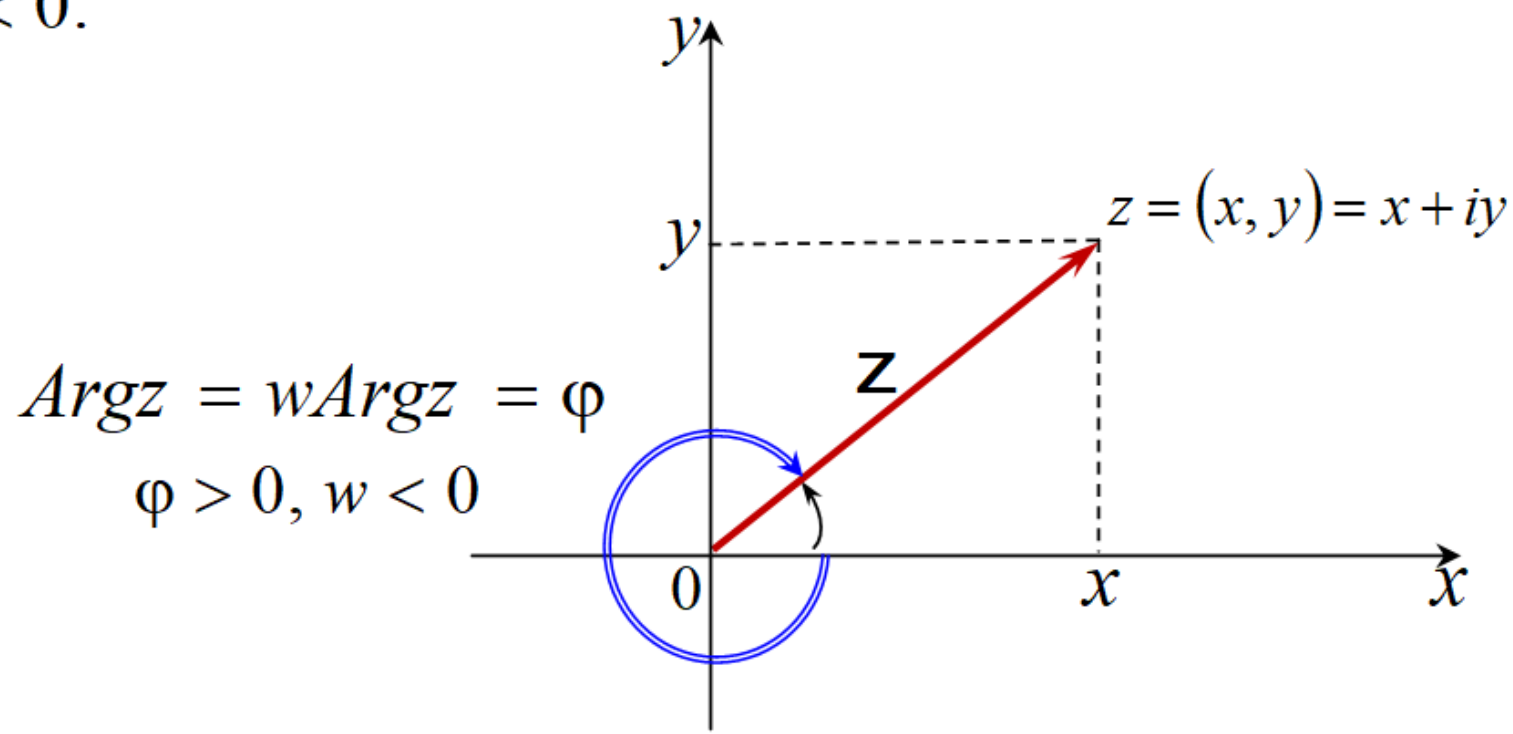


10-сурет

Ескерту. Сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бұру *бағыты оң*, ал бағыттас бағыты *теріс бағыт* деп есептелінеді (11-сурет).

Оң бағытқа сәйкес бұрыш оң таңбалы, теріс бағытқа сәйкес бұрыш теріс таңбалы болады.

$\varphi > 0,\ w < 0.$

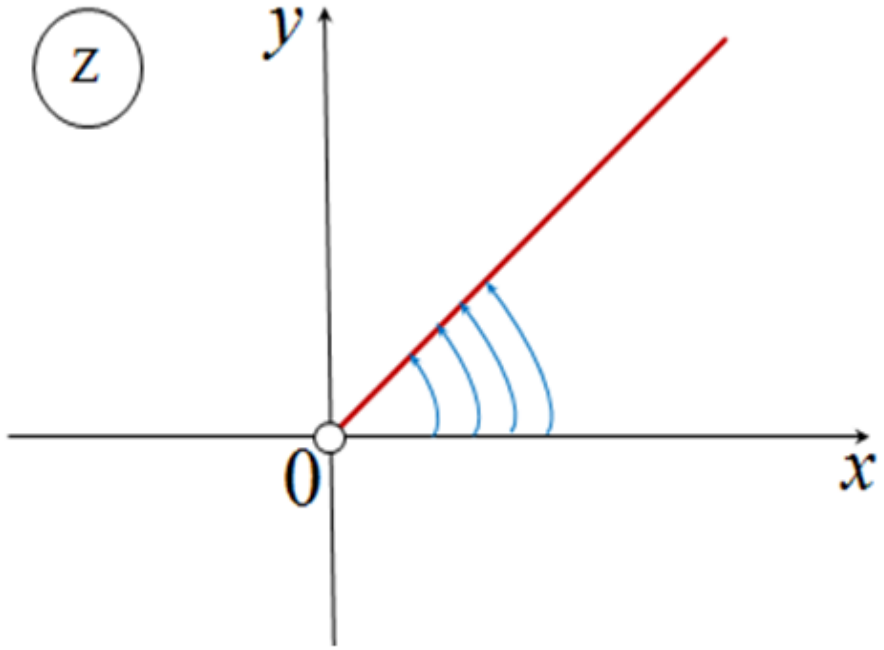


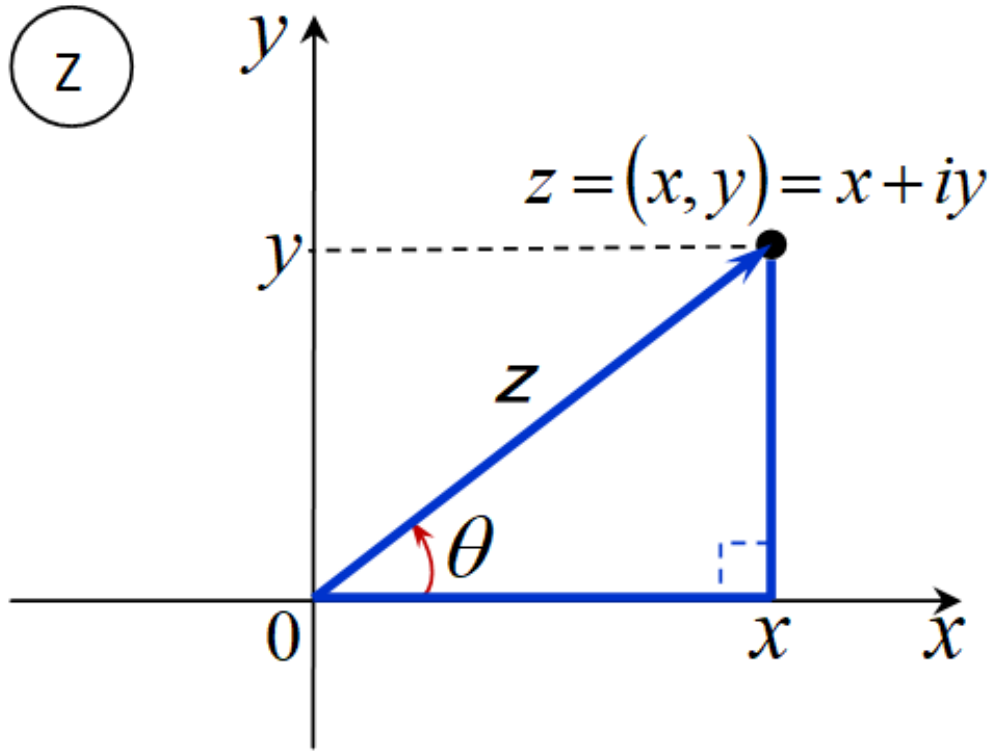
11-сурет

Анықтамадан:

1) $(0,0)$ нөлдік векторында бағыт болмағандықтан $z=(0,0)=0$ санының аргументі болмайтыны шығады ;

2) φ бұрышы - z санының аргументі $\Rightarrow$ кез келген бүтін k үшін $\varphi + 2k\pi$ бұрышы - z санының аргументі.





12-сурет

16 – суреттен $z = x + iy$ санының аргументінің бас мәні $\theta = arg\, z$ үшін келесі тұжырымдар орынды болады (12-сурет):

$tg\theta = \frac{y}{x}$ егер $x \neq 0$ болса;

$\theta = \frac{\pi}{2}$ егер $x = 0,\ y > 0$ болса;

$\theta = -\frac{\pi}{2}$ егер $x = 0,\ y < 0$ болса.

Бұл тұжырымдардан *аргументтің бас мәнін табудың* келесі формуласын аламыз:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{егер } x > 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{егер } x < 0,\ y \geq 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{егер } x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Мысал 13: $z = -3 + 3i$ комплекс сандарының аргументін (6) формуласын қолданып анықтаңыз.

Шешімі: $x = -3 < 0,\ y = 3 > 0$ бұл (6) формуласының $x < 0,\ y \geq 0$ жағдайына сәйкес келеді.

$$(6) \Rightarrow \arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi = arctg\frac{3}{-3} + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Аргументтің бас мәніне байланысты тұжырымдар:

1) $\arg z = \arg \bar{z} \Leftrightarrow \arg z = 0, \pi;$

2) $\arg z = -\arg \bar{z} \Leftrightarrow \arg z \neq 0, \pi;$

3) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$ және $|z_1| = |z_2|$.

Мысал 14:

1) $z_0 = 2,$

2) $z_1 = -i,$

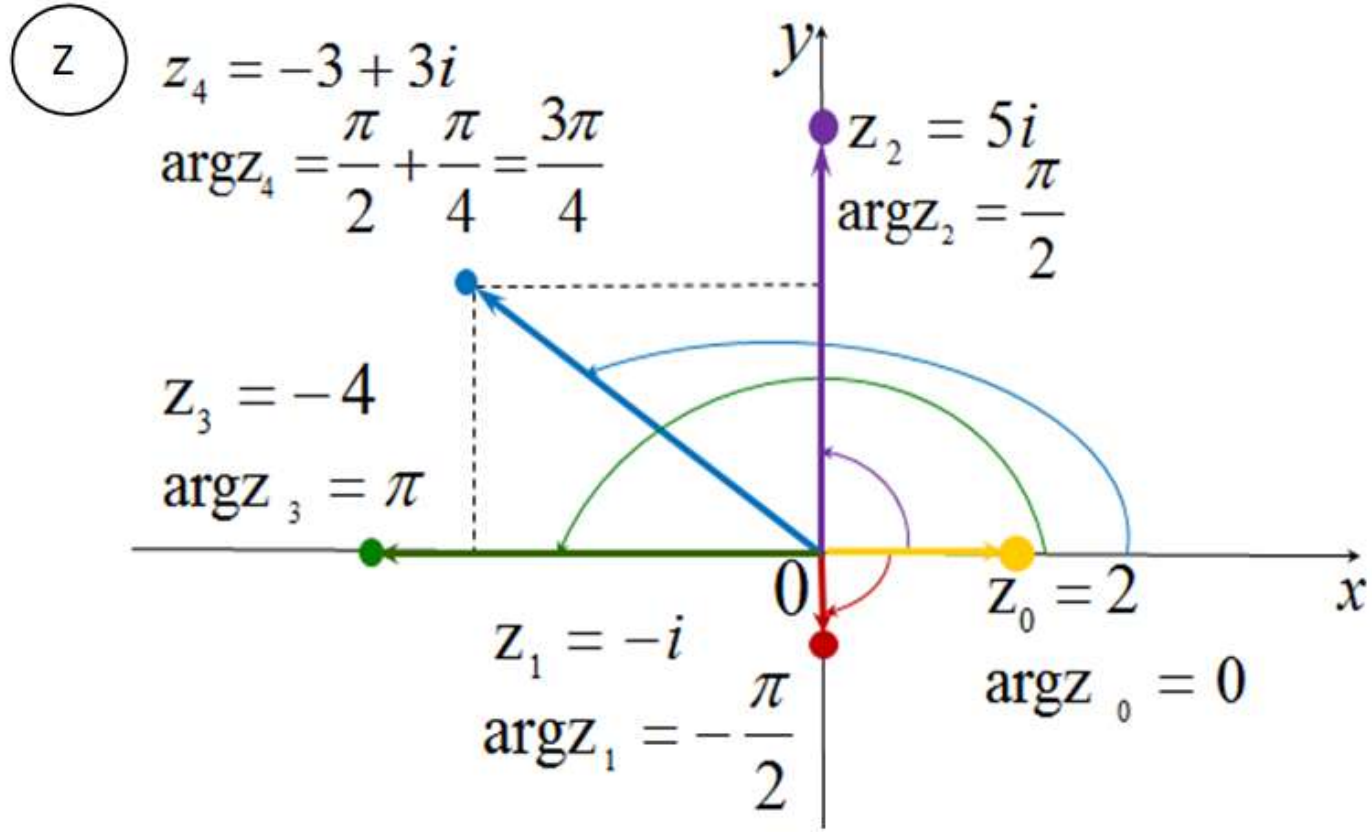
3) $z_2 = 5i,$

4) $z_3 = -4,$

5) $z_4 = -3 + 3i$

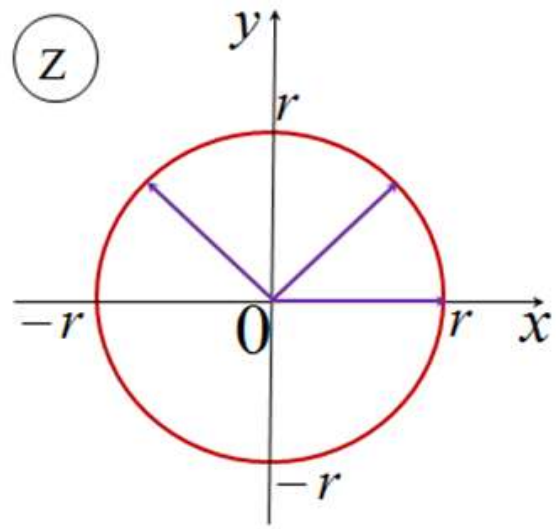
комплекс сандарының аргументін оның геометриялық кескінделуін қолданып анықтаңыз.

Шешімі: Аталынған (6) формуласымен аргументті табуға болады, бірақ комплекс сандарды геометриялық кескіндеу бұл формуланы жаттауды қажет етпейді (13-сурет).

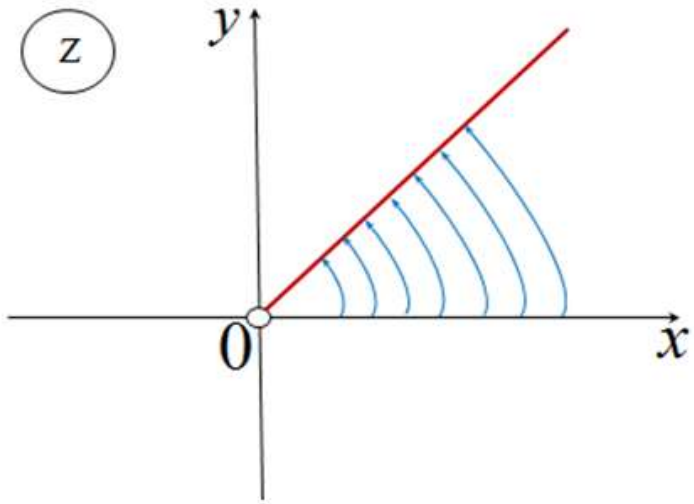


13-сурет

Модульдері тең нүктелердің жиыны *шеңберді* анықтайды (14-сурет).



14-сурет



15-сурет

Аргументтері тең (мысалы α санына тең), яғни $\arg z = \alpha$ теңдігін қанағаттандыратын ($\arg z = \alpha$ теңдеуінің шешімі болатын) комплекс сандардың жиыны Ox өсімен α бұрышын жасайтын $O(0,0)$ нүктесі аласталған сәулені анықтайды (15 – сурет).

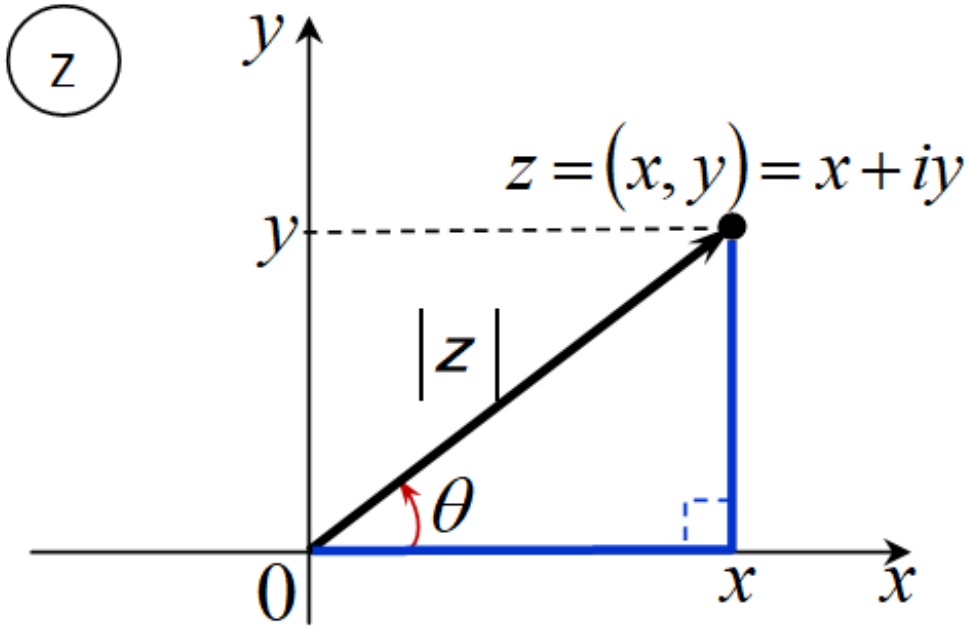
$\arg z = \alpha$ – осы сәуленің теңдеуі.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс санның геометриялық кескіні.
2. Комплекс санының аргументі ұғымы және белгіленуі.
3. Нөлдік комплекс санның аргументі.
4. Оң немесе теріс бағытты бұрыш ұғымы.
5. Аргументтің бас мәні ұғымы, белгіленуі.
6. Аргументтің бас мәнін табудың әдістері.



КОМПЛЕКС САННЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ КӨРСЕТКІШТІК ПІШІНДЕРІ



16-сурет

$$\arg z=\theta \Rightarrow x=|z|\cos\theta,\quad y=|z|\sin\theta \qquad (7)$$

теңдіктерін аламыз. z саны

$$z=x+iy=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta \Rightarrow$$

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (8)$$

(8) - $z=x+iy$ санының тригонометриялық пішіні (16-сурет).

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

пішінінде θ бас аргумент болғандықтан, бұл пішін z *санының стандартты тригонометриялық пішіні* деп аталады.

$$z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta),$$

$$\beta = \theta + 2\pi k,\ k \neq 0,\ k \in Z$$

z *санының стандартты емес тригонометриялық пішіні*.

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$$
$$z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$$

сандарының тек $\rho_1 = \rho_2$ және $\theta_1 = \theta_2$ болғанда ғана тең болатыны шығады:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2. \end{cases}$$

Мысал 15: $z = 2 + 2i$ комплекс санының тригонометриялық пішінін жазыңыз:

Шешімі:

1-әдіс:

z санының модулі: $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$

аргументі: $\theta = \arg z = arctg\,\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$

комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

формуласы бойынша:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2-әдіс: Сондай-ақ тригонометриялық пішінге келтірудің екінші әдісі тіптен жеңіл екенін көруге болады. Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз:

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

онда Z комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Комплекс көрсеткішті $e^{i\theta}, \theta \in R$ ұғымы *Эйлер формуласы* деп аталатын

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (9)$$

теңдігімен енгізіледі.

Бұл теңдіктен, косинус жұп және синус тақ болғандықтан,

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (10)$$

теңдігі шығады.

(9), (10) теңдіктерді мүшелеп қосу және азайту арқылы синус пен косинустың келесі өрнектелулерін аламыз:

$$(9)+(10) \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$(9)-(10) \Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ және $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ теңдіктерінен z комплекс санының келесі өрнектелінуі шығады:

$$z = |z|e^{i\theta}. \qquad (11)$$

(11) - z *комплекс санының көрсеткіштік пішіні*.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс санның стандартты тригонометриялық пішіні.
2. Комплекс санның стандартты емес тригонометриялық пішіні.
3. Эйлер формуласы.
4. Комплекс санның көрсеткіштік пішіні.



КОМПЛЕКС САНДЫ ДӘРЕЖЕГЕ ШЫҒАРУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮБІРІ

z комплекс санын бүтін оң дәрежеге, яғни z^n $(n=2,3,\ldots)$ санын табу есебін қарастырамыз.

Мысал 16: Есептеңіз:

1) $(5-i)^2$;

2) $(3+i)^3$.

Шешімі:

1) $(5-i)^2 = 5^2 - 2\cdot 5i + i^2 = 25 - 10i - 1 = 24 - 10i;$

2) $(3+i)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 i + 3\cdot 3i^2 + i^3 = 27 + 27i + 9i^2 + i^2\cdot i = 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i.$

Бұл мысалдар, z санының $z = x + iy$ алгебралық түрін қолдану z^n дәрежесін табу ұзақ есептеулерді қажет ететінін көрсетеді.

z^n дәрежесін табуда z санының көрсеткіштік немесе тригонометриялық пішінін қолдану әлдеқайда тиімді болады.

$z \in C, n = 2,3,...$ болсын. z^n есептелуін көрсетеміз:

$$z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow z^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n (\cos n\theta + \sin n\theta) \Rightarrow$$

$z^n = |z|^n (\cos n\theta + \sin n\theta)$ теңдігін - *Де Муавр формуласын* аламыз.

Мысал 17: Есептеңіз: $(1+i)^{13}$.

Шешімі:

Бірінші әдіс: z санының $z = x + iy$ алгебралық түрін қолдану

$$(1+i)^{13} = (1+i)^{12}(1+i) = \left((1+i)^2\right)^6(1+i) = \left(1+2i+i^2\right)^6(1+i) = (2i)^6(1+i) =$$
$$= 64i^6(1+i) = -64(1+i) = -64-64i.$$

Екінші әдіс: z санының тригонометриялық пішінін қолдану

$$(1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{13} = 2^6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 64\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4} - 4\pi\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{4} - 4\pi\right)\right) = 64\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 64\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -64-64i;$$

Үшінші әдіс: z санының көрсеткіштік пішінін қолдану

$$(1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\right)^{13}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{13} = 64\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{4}} = 64\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{4} + i\sin\frac{13\pi}{4}\right) = -64-64i.$$

z *комплекс санының* n *дәрежелі түбірі* деп

$$w^n = z, (n=2,3,4,\ldots)$$

теңдігін қанағаттандыратын w комплекс санын айтамыз.

z санының n дәрежелі түбірі $\sqrt[n]{z}$ түрінде белгіленеді, яғни

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

Енді $w=\sqrt[n]{z}$ түбірінің барлық мәндерін табсақ.

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \sqrt[n]{z}=w=|w|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

болсын деп ұйғаралық. Онда $w^n=z$ болғандықтан

$$|w|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

теңдігі орындалады. Бұл теңдіктен $|w|^n=|z|,\ n\theta=\varphi+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ немесе

$$|w|=\sqrt[n]{|z|} \text{ және } \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\ldots$$

болатыны шығады, мұндағы $\sqrt[n]{|z|}$ - $|z|$ *нақты санының n дәрежелі арифметикалық түбірі.*

Косинус пен синустың 2π - периодты екенін ескерсек

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,(n\text{-}1) \qquad (12)$$

формуласы шығады. Есептеулерде $\varphi = \arg z$ деп алған жөн.

Мысал 15: $z^2-4iz+12=0$ теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$$(z-2i)^2+4+12=0,$$

$$(z-2i)^2=-16,$$

$$z-2i=\sqrt{-16},$$

$$z-2i=\sqrt{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1.$$

$z-2i=4i$ немесе $z-2i=-4i$

$$z_1=6i,\quad z_2=-2i.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару.
2. Де Муавр формуласы.
3. Комплекс санның n дәрежелі түбірі.



Әдебиеттер тізімі

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

