Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 7

САНДЫҚ ТІЗБЕК ПЕН ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕКТЕРІ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Сандық тізбектер және оның шектері;
2. Функцияның шегі;
3. Функция шегінің қолданбалары.

САНДЫҚ ТІЗБЕК ЖӘНЕ ОНЫҢ ШЕГІ

N - натурал сандар жиынында анықталған $y = f(n), n \in N$ функциясы берілсін.

Егер біз f функциясының аргументтің әртүрлі мәндерінде қабылдайтын мәндерін, олардың бір-біріне тең немесе тең еместігіне қарамай, әртүрлі объектілер деп қарастырсақ

$$f(1), f(2),..., f(n),...$$

сандар жиынтығын аламыз. Бұл сандар жиынтығы *сандық тізбек* деп аталады. $x_n = f(n), (n = 1,2,...)$ белгілеуін енгізсек сандық тізбек

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad (1)$$

түрінде жазылады.

$x_n = f(n), (n = 1,2,...)$ *тізбектің жалпы мүшесі* деп аталады. Жалпы мүшесі берілсе, тізбектің кез келген мүшесін, яғни тізбектің өзін анықтай аламыз.

Сонымен *сан тізбегі берілген* дегеніміз $x_n = f(n), n \in N$ натурал аргументті функциясы, яғни тізбектің жалпы мүшесі берілген деген сөз. Сондықтан біз сандық тізбегі берілген дегеннің орнына қысқаша x_n тізбегі берілген деп айта береміз.

Мысал 1:

a) $x_n = \frac{1}{n}, n \in N$ – тізбектің жалпы мүшесі. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ – сан тізбегі;

b) $x_n = n^2 + 1, n \in N$ – тізбектің жалпы мүшесі. $2, 5, 10, ..., n^2 + 1, ...$ – сан тізбегі.

Анықтама 1. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $n_0(\varepsilon)$ натурал саны (яғни нөмірі) табылып $n > n_0(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (2)$$

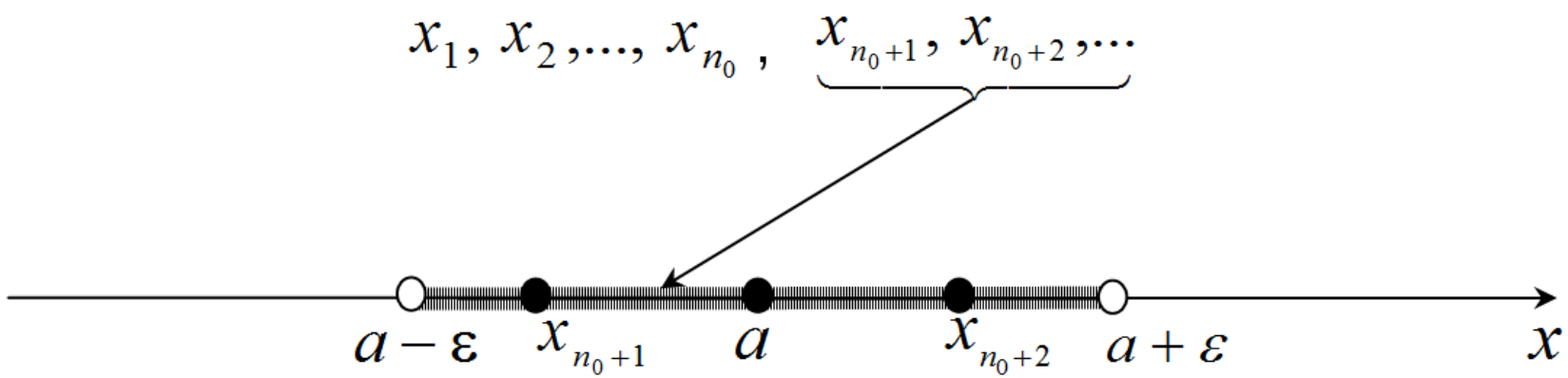
теңсіздігі орындалса, онда a *санын* x_n *тізбегінің шегі* деп атаймыз.

Белгіленуі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $x_n \to a$ (a саны x_n тізбегінің шегі немесе x_n *тізбегі* a *санына ұмтылады (жинақталады)).*

$|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігін төмендегіше жазуға болады:

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon).$$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)\right).$$



$(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ интервалын a *санының* ε *- аймағы* деп атағанбыз.

Бұдан, x_n *тізбегі* a *санына жинақталады* дегеніміз a санының кез келген аймағының сыртында тізбектің санаулы ғана мүшесі жатады (қалған шектеусіз көп мүшесі ішінде) деген сөз.

Мысал 2: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+7}{n}=2$ болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі: Қандай да бір ε оң саны берілсін. Біздің мысалда

$$x_n=\frac{2n+7}{n},\ a=2.$$

$|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздігін қарастырайық (теңсіздік қандай n нөмірі үшін орындалады екен?).

$$|x_n-a|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{2n+7}{n}-2\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{7}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{7}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{7}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\left[\frac{7}{\varepsilon}\right],$$

мұндағы $[x]$ - x санының бүтін бөлігі (x санынан артпайтын ең үлкен бүтін сан). Сонымен $|x_n-a|<\varepsilon\Leftrightarrow n>\left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$. Олай болса, егер біз $n_0(\varepsilon)=\left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$ деп алсақ, онда

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$$

қатынасын аламыз. Бұдан шектің анықтамасы бойынша

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+7}{n}=2$

болатыны шығады.

Теорема 1. Жинақты тізбектің жалғыз шегі бар.

Анықтама 2. Егер $|x_n| \le M$ теңсіздігі кез келген n нөмірі үшін орындалатындай M саны бар болса, онда x_n тізбегі *шектелген тізбек* деп аталады.

Теорема 2. Жинақты тізбек - шектелген тізбек.

Анықтама 3. Егер кез келген $M > 0$ саны үшін $n_0 = n_0(\varepsilon)$ нөмірі табылып $n > n_0(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмірлері үшін $|x_n| > M$ теңсіздігі орындалса, онда x_n *тізбегінің шегі шексіздікке тең (* x_n *тізбегі* ∞*-ке ұмтылады)* деп айтамыз да, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ түрінде белгілейміз.

Егер де $x_n > M$ $(x_n < -M)$ теңдігі орындалса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$ дейміз.

x_n тізбегінің қандай да бір мүшелерінен құрылған $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ *тізбегі* x_n *тізбегінің ішкі тізбегі* деп аталады.

Мысал 3:

$$x_n = \frac{1}{n}, n \in N: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$ *- сан тізбегі,*

$$x_{n_k} = \frac{1}{2k}, k \in N: \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$$ *- ішкі тізбегі.*

Теорема 3. Егер x_n тізбегі a санына жинақталатын болса, онда оның кез келген x_{n_k} ішкі тізбегі де осы a санына жинақталады.

Тізбектің шегі үшін арифметикалық амалдарға байланысты келесі қасиеттері орынды болды.

Сан тізбегі шегінің қасиеттері:

A, B, C – тұрақты сандар.

1. Егер $\forall n, x_n = C$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ және $x_n \le y_n$ болса, онда $A \le B$.
3. Егер $x_n \le z_n \le y_n$ және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.
4. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot A,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}, \text{ егер } B \neq 0.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Сандық тізбек ұғымы, мысалы.
2. Сандық тізбектің шегі ұғымы, мысалы.
3. Жинақты тізбек туралы теоремалар.
4. Тізбектің ішкі тізбегі ұғымы, мысалы.
5. Сан тізбегі шегінің қасиеттері.



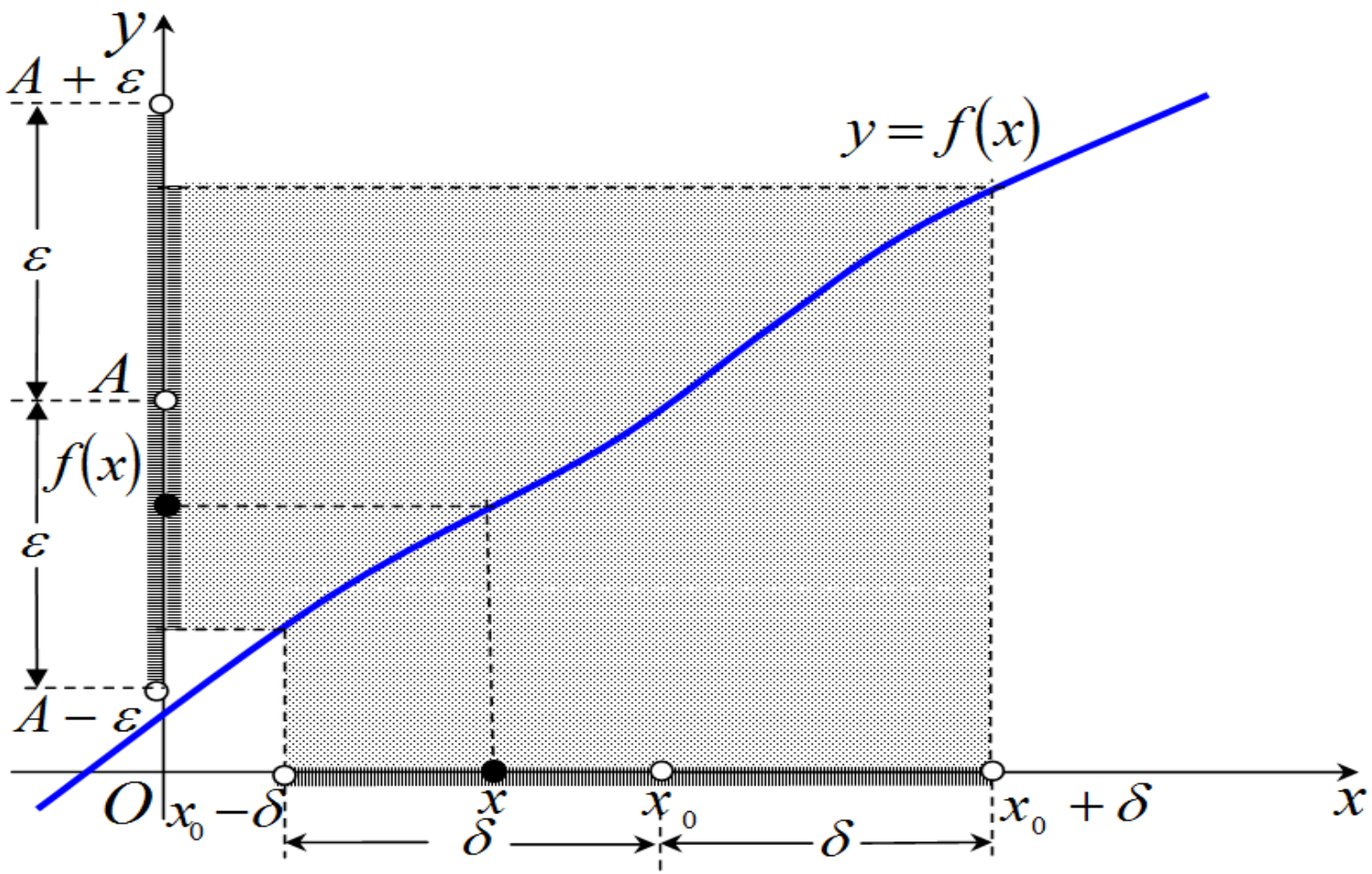
ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ

Анықтама 4. ***(тізбектер тілінде немесе Гейне бойынша).*** Егер x_0 санына жинақталатын кез келген x_n тізбегі үшін $(x_n \in D(f))$ $f(x_n)$ тізбегі A санына жинақталса (яғни $x_n \in D(f)$ және $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A$ болса), онда A *саны* $y = f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі шегі* деп аталады.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Анықтама 5. ***(ε, δ тілінде немесе Коши бойынша).*** Егер келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып $0 < |x - x_0| < \delta$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық $x \in D$ үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орынды болса, онда A *саны* $y = f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі шегі* деп аталады.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.



$$\forall (A-\varepsilon; A+\varepsilon)\, \exists (x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta):$$

$$f:(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)\to(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$$

немесе

$$\forall (A-\varepsilon; A+\varepsilon)\, \exists (x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta):$$

$$x\in(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)\Rightarrow f(x)\in(A-\varepsilon; A+\varepsilon).$$

Ескерту. 1-ші анықтама мен 2-ші анықтама эквивалентті, яғни олардың біреуі бойынша функцияның шегі A саны болса, екіншісі бойынша да A саны болады.

Мысал 4: $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$ болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі: Біздің мысалда $f(x)=3x+2,\ A=8,\ x_0=2$. Қандай да бір $\varepsilon>0$ саны берілсін. $|f(x)-A|<\varepsilon$, яғни $|(3x+2)-8|<\varepsilon$ теңсіздігін қарастырайық.

$$|(3x+2)-8|<\varepsilon \Leftrightarrow |3x-6|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Сонымен $|(3x+2)-8|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Бұдан $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$ деп алсақ,

$$0<|x-2|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow |(3x+2)-8|<\varepsilon$$

қатынасы шығады. Онда анықтама бойынша, $\lim\limits_{n\to 2}(3x+2)=8$ екені шығады.

Тұжырым 1. Егер $f(x)$ – элементар функция және x_0 нүктесінде анықталған болса, онда функцияның x_0 нүктесіндегі шегі оның осы нүктедегі мәніне тең болады:

$$f(x) \text{ – элементар функция, } \quad x_0 \in D(f) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Мысал 5: $\lim_{x \to 2}(3x+2) = 8$ шегін табыңыз.

Шешімі: Біздің мысалда $f(x) = 3x + 2,\ x_0 = 2.$

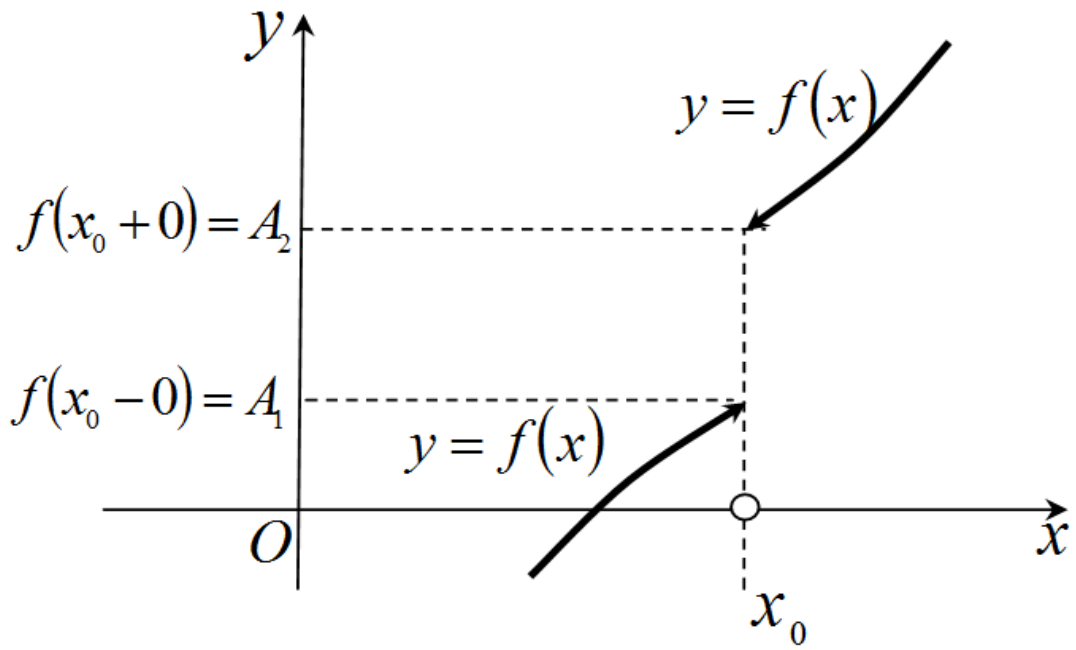
$f(x) = 3x + 2$ функциясы элементар және $x_0 = 2 \in D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Онда тұжырым бойынша

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(x) = 3 \cdot 2 + 2 = 8.$$

Егер де $0<x_0-x<\delta\ (0<x-x_0<\delta)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$ болса, онда A санын $f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі сол (оң) жақты шегі* деп аталып $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ $(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x))$ түрінде немесе қысқаша $f(x_0-0)=A_1, (f(x_0+0)=A_2)$ түрінде белгіленеді.

Оң және сол жақты шектер *бір жақты шектер* деп аталады.



Тұжырым. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A.$

1. Егер $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$: $|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ болса, онда A *санын* $f(x)$ *функциясының* x *шексіздікке ұмтылғандағы шегі* деп айтамыз. Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

   Егер де $x > M$ $(x < -M) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, онда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A\right)$ дейміз.

Мысал 6: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ болатынын дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі: Біздің мысалда $f(x)=\dfrac{x+1}{x},\ A=1.$

$\varepsilon>0$ саны берілсін. $|f(x)-A|<\varepsilon$, яғни $\left|\dfrac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon$ теңсіздігін қарастырайық:

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{x+1-x}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{|x|}<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Сонымен $\left|\dfrac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}.$ Бұдан $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$ деп алсақ,

$$|x|>M\Rightarrow\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon$$

қатынасы шығады. Онда анықтама бойынша, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ екені шығады.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ дейміз, егер $\forall M>0\ \exists\delta>0:$ $x\in D$ және $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$.

Егер де $f(x)>M$ $(f(x)<-M)$ болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty)$ дейміз.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ дейміз, егер $\forall M>0$ $\exists N>0:$ $|x|>N \Rightarrow |f(x)|>M.$

Ескерту. $f(x)$ функциясының шегін Гейне анықтамасы бойынша $f(x_n)$ сандық тізбегінің шегі деп қарастыруға болатындықтан, тізбектің шегінің қасиеттері функцияның шегіне де орынды болады.

Функция шектерінің қасиеттері:

A, B, C – тұрақты сандар.

1. Тұрақтының шегі осы тұрақтының өзіне тең.

2. $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$ және a нүктесінің қандай да бір ойық аймағында:

а) $f_1(x) \le \varphi(x)$ болса, онда $A \le B$ болады;

б) $f_1(x) \le \psi(x) \le f_2(x)$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$ болады.

3. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ және $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ шектері ақырлы болса, онда:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a} C \cdot f(x) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$, егер $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \ne 0$.

Мысал 7: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\frac{6}{3}=2.$$

Мысал 8: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Мысал 9: $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x^2-20x+100)}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x^2-10x}=\frac{300}{0}=\infty.$$

Мысал 10: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Мысал 11: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{7x-8}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

а) Бөлшекті белгісіздің ең үлкен дәрежесіне бөле отырып шекті есептеу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{7x-8}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{3}{x}}{7-\dfrac{8}{x}}=\frac{4}{7}.$$

ә) Көпмүшеліктердің қатынасы ретінде қарастырып белгісіздердің дәрежелерін салыстырып шекті есептеу:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_o x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_o x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_o}{b_o}, & n=m,\\ 0, & n<m,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{7x-8}=\left|\begin{matrix}n=1\\ m=1\\ n=m\end{matrix}\right|=\frac{4}{7}.$$

Мысал 12: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{array}{l} n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots .\cdot n \\ 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120 \\ 5!=4!\cdot 5=120 \\ 5!=3!\cdot 4\cdot 5=120 \\ (n+1)!=n!(n+1) \end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)-n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Мысал 13: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)-(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2+1)}{(n+1)!(n+2-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=1.$$

ФУНКЦИЯ ШЕГІНІҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ

Мысал 14: Айталық жыл басында банкке салынған ақша бірлігі A_0 болсын. Әрбір жыл сайын банк $p\%$ төлеп отырсын. Сонда t жылдан кейінгі оның көлемін табайық.

Шешімі: Бірінші жылы өсімше $A_1 = A_0 + \frac{A_0 p}{100} = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ бірлік болады. Ал екінші жылы тағыда $p\%$ - ке өсіргенде ол:

$A_2 = A_1 + \frac{A_1 p}{100} = A_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ бірлік болады.

Осылай берсек, онда t жылдан кейін ақша көлемі:

$$A_t = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \qquad (3)$$

арқылы өрнектеледі.

Егер өсім пайызын жылына бір рет емес, n рет жүргізсек, онда (3) формуласынан

$$A_t = A_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \qquad (4)$$

формуласын аламыз. Бұдан, өсім пайызын жүргізу санын шектеусіз өсірсек, яғни $n \to \infty$ жағдайын қарастырсақ, онда салымның t жылдағы ақша көлемі:

$$A_t = \lim_{n\to\infty}\left(A_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right) = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100n}nt} = A_0 e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{pnt}{100n}} = A_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

$$A_t = A_0 e^{\frac{pt}{100}} \qquad (5)$$

формуласымен анықталады.

(4) формуласын *күрделі пайыздар формуласы* деп атайды.

(5) формуласын *пайыздарды үзіліссіз есептеу формуласы* дейді.

(5) және (4) формулаларын $n=1$ (әр жыл сайын), $n=2$ (әрбір жарты жыл сайын), $n=4$ (үш ай сайын), $n=12$ (ай сайын), $n=365$ (әрбір күн сайын) болғандағы өзгерістерін $t=20$ жыл, $p=5\%$, $A_0=1$ (ақша бірлік) бойынша салыстырғанда мына төмендегі кестені алуға болады:

	Күрделі пайыздар формуласы					Үзіліссіз есептеу формуласы
	n=1	*n*=2	*n*=4	*n*=12	*n*=365	
Салым	2,635	2,685	2,701	2,712	2,718	2,7182
Ақша бірлігі	5	1	5	6	1	

Сонымен, әр жыл сайын $p=5\%$ өскенде (4), (5) формулаларының мәндерінің бір-бірінен айырмашылығы азғантай, яғни 2,5 төңірегінде болатынын кестеден байқауға болады.

Мысал 15: Тәжірибе жүзінде x -тауардың бағасы мен y -тауарға сұраныс арасындағы тәуелділік $y=\frac{200}{x+2}$ функциясымен анықталған. Тауар бағасы $x\to\infty$ өскен уақытта, тауарға сұраныс қандай болатынын анықтау керек.

Шешімі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{200}{x+2}=\frac{200}{\infty}=0.$$

Сонымен, баға өскен сайын, сұраныс нөлге жақындайды екен.

Мысал 16: Инфляция деңгейі жылына 20% болсын. Сонда үйде сақталынған жинақ ақшаның нақты құны төмендейді. Бір айда ол қаншаға азаяды?

Шешімі: Пайыздарды үзіліссіз есептеу формуласын пайдалансақ:

$$A\left(\frac{1}{12}\right) = A_{0-}\, e^{\frac{-20\cdot\frac{1}{12}}{100}} = A_0 e^{\frac{-1}{60}} \approx 0{,}98\cdot A_0,$$

мұндағы A_0 - үйде сақталған ақша көлемі.

Сонымен, инфляция ай сайын үйде сақталынған ақша құнын жуық шамамен 2% азайтады екен.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Функция шегінің тізбектер тілінде немесе Гейне бойынша анықтамасы.
2. Функция шегінің ε, δ тілінде немесе Коши бойынша анықтамасы.
3. Бір жақты шектер ұғымы.
4. Функция шектерінің қасиеттері.
5. Функция шегінің қолданбалары.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

