Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 6

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Сандар жиыны және аралықтар;
2. Функция және оның берілу тәсілдері;
3. Функцияның қолданбалары.

САНДАР ЖИЫНЫ ЖӘНЕ АРАЛЫҚТАР

Элементтері сандар болатын жиын *сандық жиын* деп аталады.

$N = \{1;2;3;...;n;...\}$ - *натурал сандар жиыны* - реттік нөмір немесе қандай да бір объектілердің саны ретінде қабылдауға болатын сандар жиыны;

$Z_0 = \{0;1;2;3;...;n;...\}$ - *теріс емес бүтін сандар жиыны* – натурал сандар мен 0 санынан тұратын жиын;

$Z = \{0;\pm 1;\pm 2;\pm 3;...;\pm n;...\}$ - *бүтін сандар жиыны* – 0 санынан, натурал сандардан және оларға қарама-қарсы сандардан тұратын жиын;

$Q = \left\{\frac{m}{n}; m \in Z, n \in N\right\}$ - *рационал сандар жиыны* - жай бөлшек түрінде жазылатын сандар жиыны.

Ескерту.

1) кез келген бүтін санды жай бөлшек түрінде жазуға болатындықтан (мысалы: $5=\frac{10}{2}$), *бүтін сандар да рационал сандар болады:*

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q;$$

2) кез келген $\frac{m}{n}$ жай бөлшегі периодты ондық бөлшек түрінде жазылатындықтан рационал сандар жиынын *периодты ондық бөлшек түрінде жазылатын сандар жиыны* деп те қарастыруға болады

(мысалы: $\frac{2}{3}=0,666...=0,(6);\quad 5=5,000...=5(0)).$

I - иррационал сандар жиыны - жай бөлшек немесе периодты ондық бөлшек түрінде жазылмайтын сандар жиыны (Мысалы: $\sqrt{2}; \pi$).

Рационал сандар жиыны мен иррационал сандар жиыны *нақты сандар жиынын* құрайды. Нақты сандар жиыны R әрпімен белгіленеді.

Демек, $R = Q \cup I$.

Төменгі сандар жиыны *аралықтар* деп аталады:

1. $[a;b]=\{x: a\le x\le b\}$ - *сегмент немесе кесінді (тұйық аралық)*;

$[a;b]$ - тұйықталған



2. $(a;b)=\{x: a<x<b\}$ - *интервал тұйықталмаған (ашық) аралық*;

$(a;b)$ - тұйықталмаған



3. $(a;b]=\{x: a<x\le b\}$, $[a;b)=\{x: a\le x<b\}$ - *жартылай сегменттер немесе жартылай интервалдар;*

$(a;b]$ - сол жағынан тұйықталмаған, оң жағынан тұйықталған

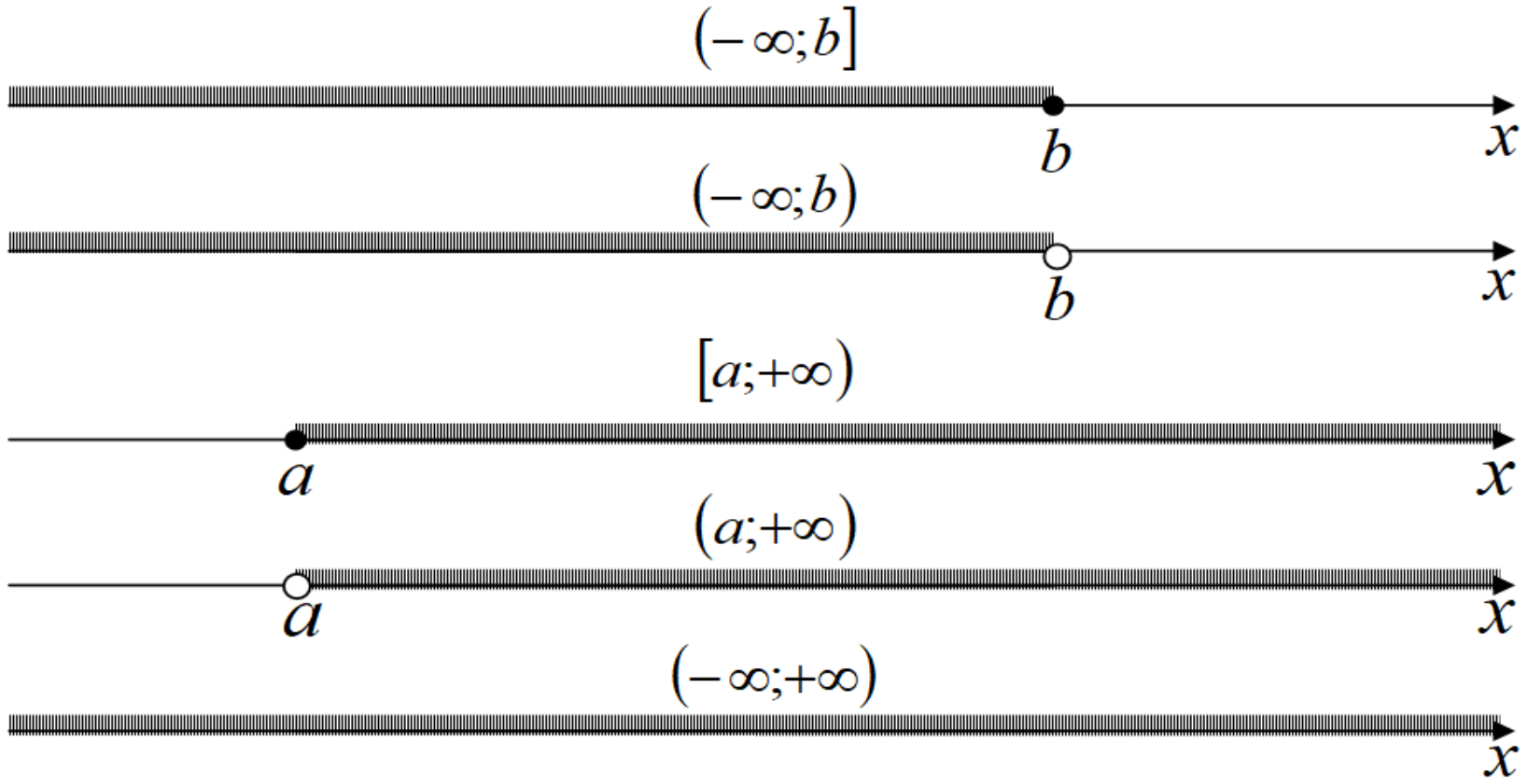


$[a;b)$ - сол жағынан тұйықталған, оң жағынан тұйықталмаған



4. $(-\infty;b]=\{x: x\le b\}$, $(-\infty;b)=\{x: x<b\}$,
$[a;+\infty)=\{x: x\ge a\}$, $(a;+\infty)=\{x: x>a\}$,
$(-\infty;+\infty)=R$ - шексіз аралықтар.

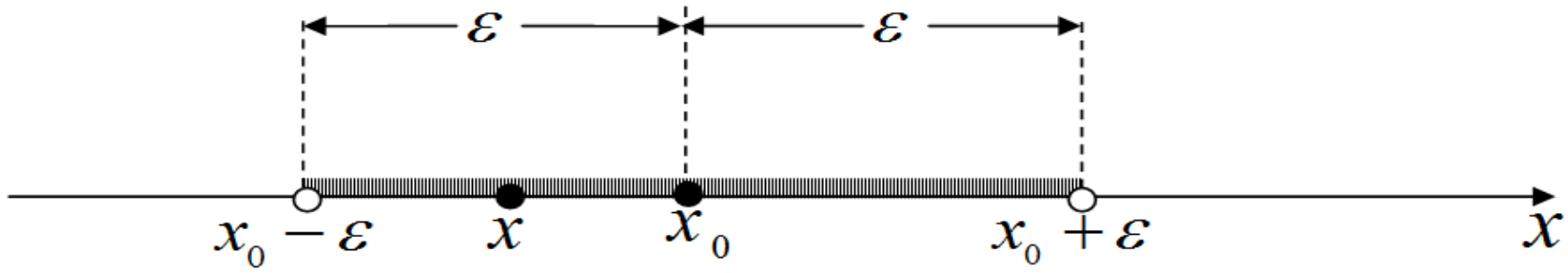
Ескерту. $x\in R$ жазбасының орнына $-\infty<x<+\infty$ түріндегі жазбаны қолдана береміз.



Анықтама 1. x_0 *нүктесінің (санының)* ε *- аймағы (төңірегі)* деп

$$(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon),\ (\varepsilon>0)$$

интервалын айтамыз.



$$x\in(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)\Leftrightarrow\ |\ \text{интервалдың анықтамасы бойынша}\ |$$

$$\Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon\Leftrightarrow|x-x_0|<\varepsilon.$$

Сонымен x *нүктесі* x_0 *нүктесінің* ε *аймағына тиісті* дегеніміз

$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ және $|x-x_0|<\varepsilon$

теңсіздіктері орынды болады деген сөз.

x_0 *нүктесінің* ε *аймағын* $U_\varepsilon(x_0)$ түрінде белгілейміз:

$$U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon).$$

Анықтама 2. $(x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$ жиынын x_0 нүктесінің ε ойық аймағы деп атаймыз да $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)$ түрінде белгілейміз:

$$\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

$$\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$



Анықтама 3. Егер $x \le M$ $(x \ge m)$ теңсіздігі D жиынына тиісті кез келген x саны үшін орындалатындай $M(m)$ саны бар болса, онда D сандар жиыны *жоғарыдан (төменнен) шектелген* деп аталады.

Анықтама 4. Егер D сандар жиыны жоғарыдан да төменнен де шектелген болса ($m \le x \le M$ теңсіздіктері D жиынына тиісті кез келген x саны үшін орынды болатын m, M сандары табылса), онда D сандар жиыны *шектелген* деп аталады.

Мысал 1:

1. $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ аралықтары *шектелген жиындар,* себебі бұл аралықтардағы кез келген x саны үшін $a \le x \le b$ $(m = a, M = b)$ теңсіздіктері орынды;

2. $[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$ - *төменнен шектелген*, себебі $x \in [a;+\infty)$ немесе $x \in (a;+\infty) \Rightarrow x \ge a$ $(m = a)$;

3. $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$ - *жоғарыдан шектелген*, себебі $x \in (-\infty;b]$ немесе $x \in (-\infty;b) \Rightarrow x \le b$ $(M = b)$;

4. $(-\infty;+\infty)$ - *жоғарыдан да, төменнен де шектелмеген жиын*.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Сандық жиын ұғымы, түрлері.
2. Аралықтар ұғымы, түрлері.
3. Нүктенің аймағы ұғымы, белгіленуі.
4. Нүктенің ойық аймағы ұғымы, белгіленуі.
5. Жоғарыдан (төменнен) шектелген немесе шектелген жиын ұғымы, мысалы.



ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ

Анықтама 5. D сандар жиынының әрбір x саны үшін қандай да бір f заңы (ережесі) бойынша бір y саны сәйкестілікке қойылса, онда D жиынында анықталған f *функциясы* берілген дейміз. Әдетте функция

$$y = f(x),\ \ x \in D\,, \tag{1}$$

түрінде жазылады. Мұндағы D - *функцияның анықталу облысы*, x - *тәуелсіз айнымалы немесе аргумент*, y және $f(x)$ - f *функциясының* x *нүктесіндегі мәні*, $E = \{f(x) : x \in D\}$ - *функцияның мәндерінің жиыны (өзгеру облысы)* деп аталады.

Біз f функциясы дегеннің орнына $y = f(x)$ немесе $f(x)$ *функциясы* деп те айтатын боламыз.

Ескерту. Функция тек $y = f(x)$ сәйкестілік заңдылығымен ғана берілуі мүмкін (D жиыны көрсетілмеген). Мұндай жағдайда D анықталу облысы ретінде $f(x)$ мағыналы болатын барлық сандар жиыны алынады:

$$D = \{x : f(x) - \text{мағыналы}\}.$$

Мысал 2: $y=\dfrac{\log_2(x+5)}{x^2-1}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

$$D=\{x:\dfrac{\log_2(x+5)}{x^2-1}-\text{мағыналы}\}=\{x:\begin{cases}x+5>0\\x^2-1\neq 0\end{cases}\}=\{x:\begin{cases}x>-5\\x\neq\pm 1\end{cases}\}=$$

$$=(-5;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

Сонымен $D=(-5;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$

Мысал 3: $y = 4 + 5\sin x$ функциясының мәндерінің жиынын табыңыз.

Шешімі: $D = \{x : 4+5\sin x - $мағыналы$\} = \{x : x - $ кез келген сан$\} = (-\infty, +\infty)$.
Синус функциясы модулі бойынша бірден артпайтын мәндер қабылдайтындықтан

$$|\sin x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -5 \le 5\sin x \le 5 \Leftrightarrow 4-5 \le 4+5\sin x \le 4+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le y \le 9.$$

Сонымен $E = [-1; 9]$.

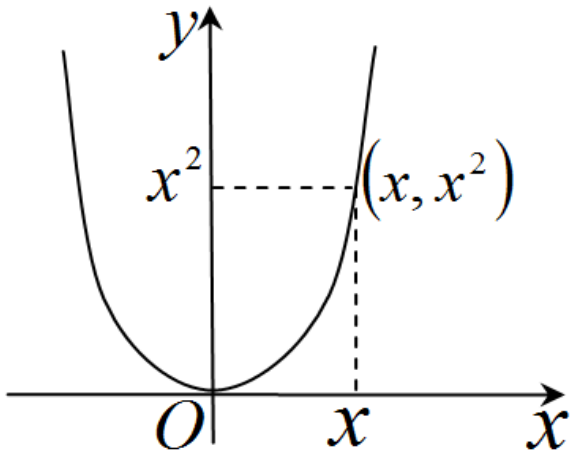
Анықтама 6. $y = f(x),\ x \in D$ *функциясының графигі* деп

$$G = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

реттелген қос сандар жиынын айтамыз.

Геометриялық тұрғыдан $(x, f(x))$ - OXY жазықтығының абциссасы x, ординатасы $f(x)$ нүктесі болады, яғни G - OXY *жазықтығындағы нүктелердің геометриялық орны* болады.

Мысал 4: $y = x^2, x \in R$ функциясының графигі $G = \{(x, x^2): x \in R\}$ жиыны OXY жазықтығында параболаны құрайды:



Ескерту. Кез келген функцияның графигі OXY жазықтығында сызық құрайды деп айтуға болмайды.

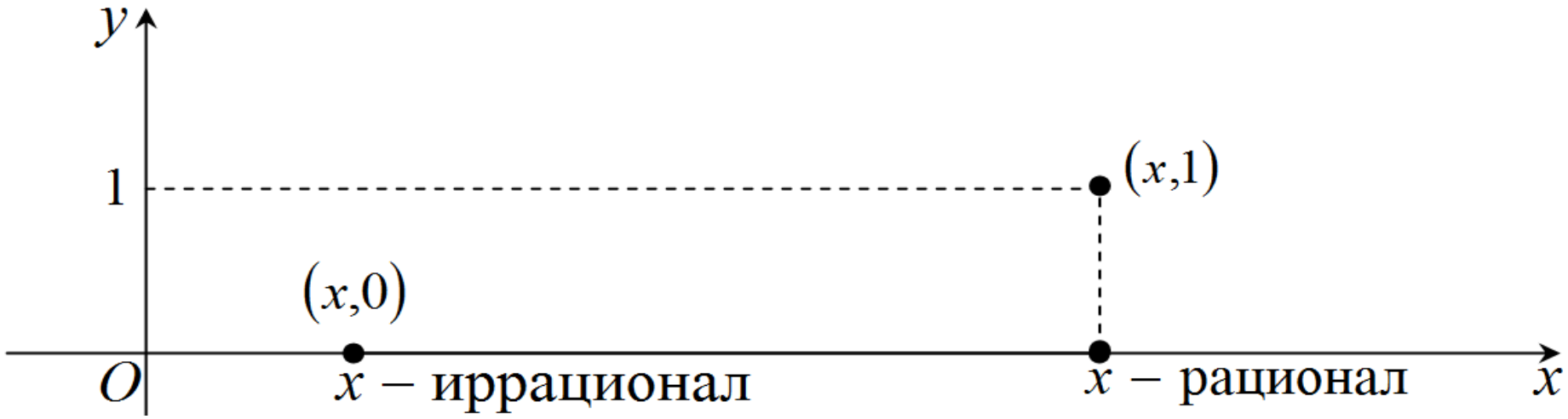
Мысал 5:

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } x-\text{рационал},\\ 0, \text{ егер } x-\text{иррационал}\end{cases}$$

Дирихле функциясының графигі

$$G=\{(x,D(x)):x\in R\}=\{(x,1):x\in Q\}\cup\{(x,0):x\in R\mid Q\}$$

ешқандай сызықты құрамайды (G жиынын жазықтықта көрсету мүмкін емес).

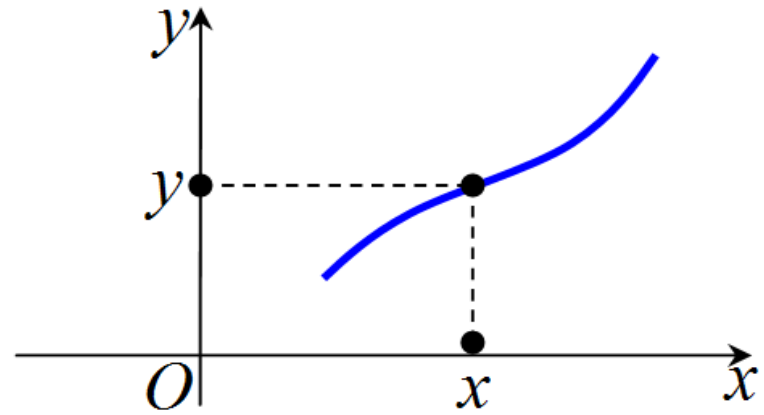


Функцияның берілу тәсілдері:

1) *аналитикалық тәсіл* - y, x айнымалыларының тәуелділігі формуламен беріледі (сипатталады): $y = x^2$;
2) *кестелік тәсіл* – аргументтің бірнеше мәні мен функцияның оларға сәйкес мәндері беріледі:

x	0	0,1	0,2	0,3
y	0	1	2	3

3) *графиктік тәсіл* – тәуелділік график (сызба) арқылы беріледі:



4) *сөзбен* - y, x айнымалыларының тәуелділігі сөзбен сипатталады (Мысалы: Дирихле функциясы).

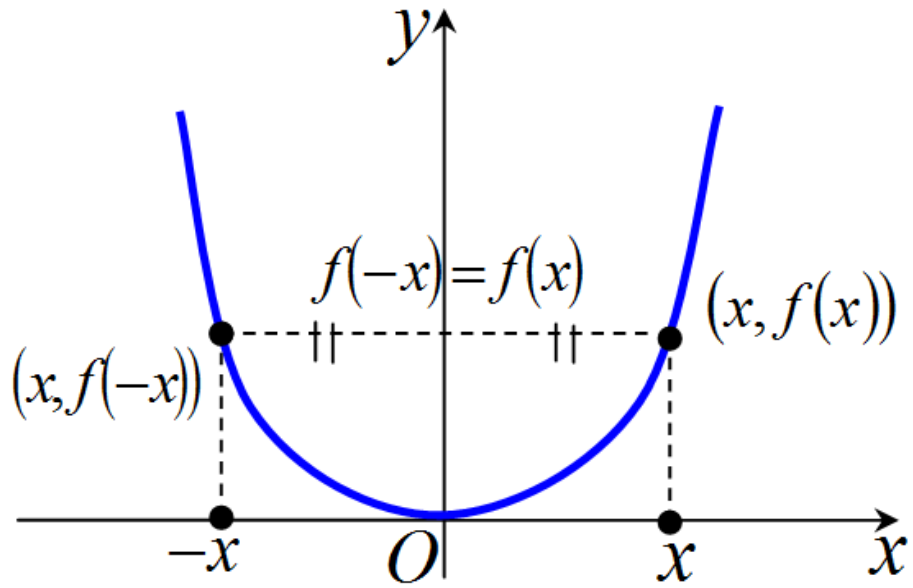
Анықтама 7. Егер $\forall x \in D$:

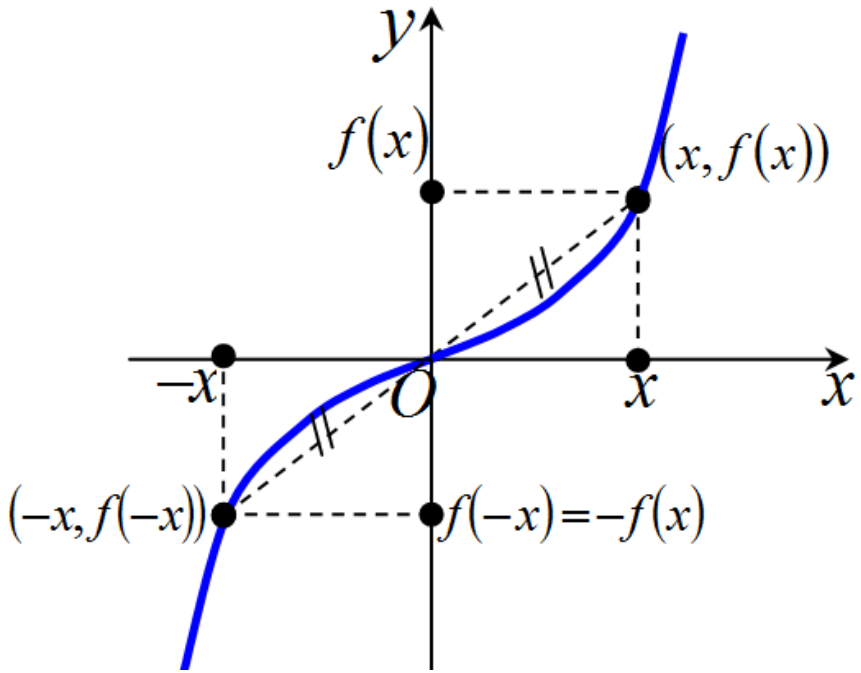
$$f(-x) = f(x) \ \left[f(-x) = -f(x) \right]$$

теңдігі орындалса, онда $y = f(x), x \in D$ функциясы *жұп функция (тақ функция)* деп аталады.

Анықтамадан жұп және тақ функцияның анықталу облысы бас нүктеге симметриялы болатыны шығады ($x \in D$ және $-x \in D$);

- *жұп функцияның графигі* Oy өсіне қарағанда симметриялы:





- *тақ функцияның графигі* координаталардың бас нүктесіне қарағанда симметриялы:

Мысал 6:

$y = \ln|x|, \quad y = \ln x, \quad y = x^3, \quad y = x - 9$

функцияларының жұп / тақтылығын анықтаңыз.

Шешімі:

1) $y = \ln|x|$ функциясының анықталу облысы $D = \{x : |x| > 0\} = \{x : x \neq 0\} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы және $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x) \Rightarrow y = \ln|x|$ - жұп;
2) $y = \ln x$ функциясының анықталу облысы $D = \{x : x > 0\} = (0;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы емес $\Rightarrow y = \ln x$ - жұп та, тақ та емес;
3) $y = x^3$ функциясының анықталу облысы $D = (-\infty;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы және $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \Rightarrow y = x^3$ - тақ функция;
4) $y = x - 9$ функциясының анықталу облысы $D = (-\infty;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы, бірақ $f(-x) = -x - 9, \quad -f(x) = -(x - 9)$ болғандықтан, $f(-x) = f(x)$ және $f(-x) = -f(x)$ теңдіктерінің бірі де орындалмайды $\Rightarrow y = x - 9$ жұп та, тақ та емес функция.

Анықтама 8. Егер $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$ теңдігі D анықталу облысына тиісті кез келген x үшін орынды болатын қандай да бір $T\neq 0$ саны табылса, онда $y=f(x)$ функциясы *периодты* деп аталады.

Анықтамадан, егер f функциясы периодты болса, онда кез келген бүтін n үшін $x+nT\in D$ болып $f(x)=f(x+nT)$ теңдігі орынды болатыны шығады:

$$f(x)=f(x+T)=f\big((x+T)+T\big)=f(x+2T)=\ldots=f(x+nT).$$

Соңғы теңдіктен:

1) функцияның периодты болуы үшін, оның анықталу облысының шектеусіз (кез келген бүтін n үшін $x+nT\in D$ болуы үшін D екі жақтан да шектелмеген) болуы қажет;
2) $f(x)=f(x+T)$ қандай да бір T саны үшін орындалса, онда бұл теңдік шексіз көп сандар үшін (кез келген nT үшін, $n\in Z$) орындалатыны шығады.

T-ның осындай оң мәндерінің ең кішісі $f(x)$ *функциясының периоды* деп, ал $f(x)$ *функциясы T - периодты* деп аталады.

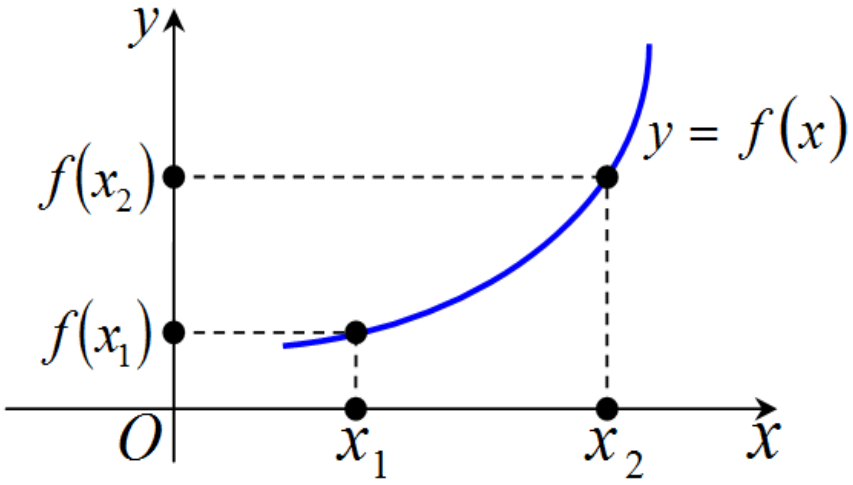
Мысал 7: $f(x)=\sin x$ функциясы үшін $f(x)=f(x+T)$ теңдігі, яғни $\sin x=\sin(x+T)$ теңдігі T-ның

$$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$$

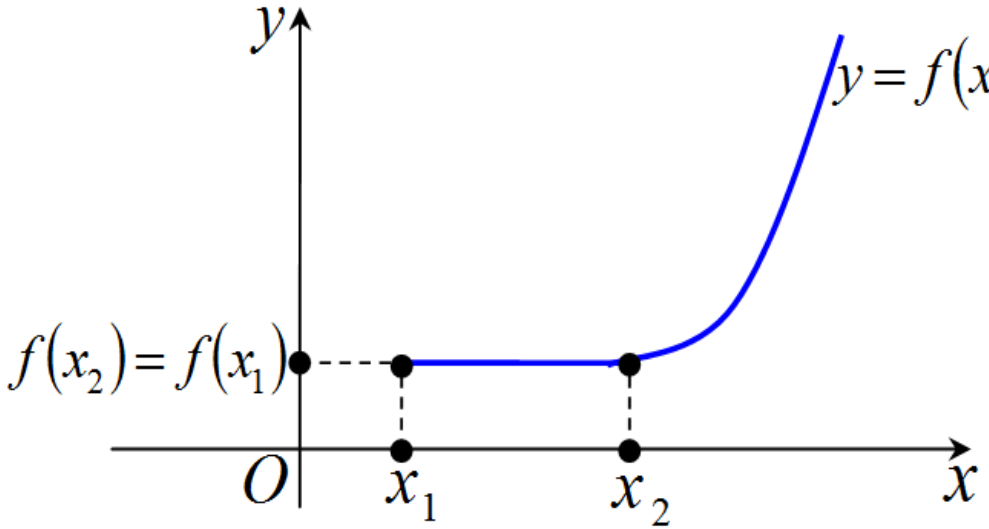
мәндері үшін орынды, оның ішіндегі оң мәндері 2π, 4π, 6π,... . Ал олардың ішіндегі ең кішісі 2π. Олай болса $f(x)=\sin x$ функциясы 2π - периодты функция.

Анықтама 9. $y=f(x), x\in D$ функциясы D жиынында:

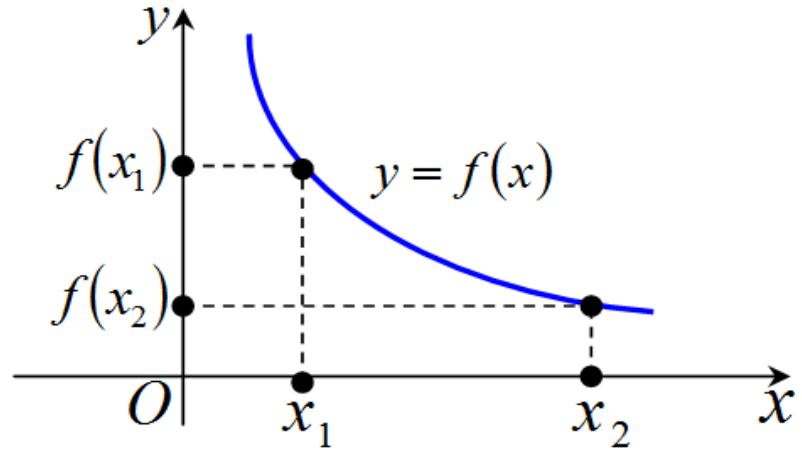
- *өспелі* деп аталады, егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$



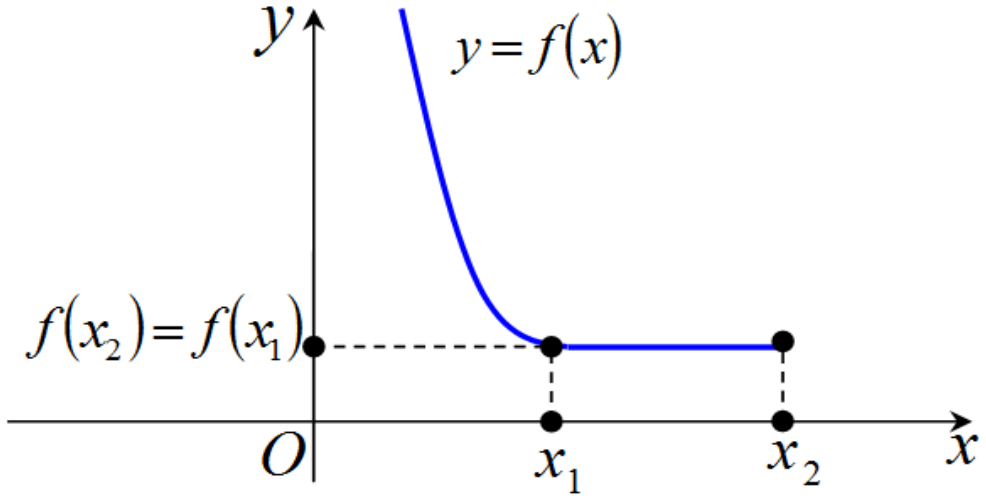
- *кемімейтін* деп аталады, егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$



- *кемімелі* деп аталады, егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$



- *өспейтін* деп аталады, егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$



Бұл функциялар жалпы *бірсарынды (монотонды)* деп аталады.

$y = f(x), x \in D$ функциясы $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ шартын қанағаттандырсын, яғни f өзара бірмәнді сәйкестік болсын. Онда $\forall y \in E \quad f(x) = y$ болатындай, бір ғана $x \in D$ сәйкестікке қоюға болады.

Нәтижесінде біз E жиынында анықталған мәндерінің жиыны D болатын функция аламыз. Бұл функция $y = f(x), x \in D$ функциясына *кері функция* деп аталады да $x = f^{-1}(y), y \in E$ түрінде белгіленеді. Әдеттегіше, аргументті x, функцияның мәнін y әрпімен белгілесек, кері функция

$$y = f^{-1}(x), \; x \in E$$

түрінде жазылады.

Мысал 8:

a) $y=7x, x\in(-\infty;+\infty)$ функциясының кері функциясы $x=\frac{1}{7}y, y\in(-\infty;+\infty)$. Әдеттегіше, аргументті x, функцияның мәнін y әрпімен белгілесек, кері функция $y=\frac{1}{x}x, x\in(-\infty;+\infty)$ түрінде жазылады;

b) $y=x^2, x\in(-\infty;+\infty)$ функциясының кері функциясы жоқ, себебі y функциясының нөлден өзгеше әрбір мәніне x аргументінің екі мәні сәйкес келеді $\left(y=\frac{1}{9}\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\right.$ немесе $\left.x=\frac{1}{3}\right)$, яғни $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ шарты орындалмайды.

Егер де функцияның анықталу облысы $[0;+\infty)$ немесе $(-\infty;0]$ аралығы болса, яғни $y=x^2, x\in[0;+\infty)$ немесе $y=x^2, x\in(-\infty;0]$ функциясы берілсе, онда бұл функциялар үшін $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ шарты орындалады да олардың кері функциялары сәйкесінше $y=\sqrt{x}, x\in[0;+\infty)$ немесе $y=-\sqrt{x}, x\in[0;+\infty)$ түрінде жазылады.

Анықтама 10. $y=f(u), u\in E, \quad u=\varphi(x), x\in D$ және $x\in D\Rightarrow\varphi(x)\in E$ болсын. Онда $y=f[\varphi(x)], x\in D$ функциясын φ және f функцияларының *суперпозициясы* немесе *күрделі функция* деп атаймыз.

Мысал 9: $y=cos\sqrt{x}$ функциясы

$$y=cosu, \quad u\in(-\infty;+\infty) \text{ және } u=\sqrt{x}, \quad x\in[0;+\infty)$$

функцияларының суперпозициясы, яғни $y=cos\sqrt{x}$ функциясы $[0;+\infty)$ аралығында анықталған күрделі функция.

Анықтама 11. y айнымалысының x айнымалысынан тәуелділігі $F(x,y)=0$ теңдеуімен берілсе (яғни y айнымалысы x айнымалысы арқылы өрнектелмеген болса), онда $y=f(x)$ *функциясы айқын емес түрде берілген* дейміз.

Мысал 10: $2x+y-6=0$ теңдеуімен $y=-2x+6$ функциясы айқын емес түрде берілген.

Анықтама 12. y, x айнымалыларының тәуелділігі үшінші бір t айнымалысы арқылы

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ t \in (\alpha; \beta) \end{cases} \qquad (2)$$

жүйесі түрінде берілсе, онда (2) жүйесін x *айнымалысына тәуелді* y *функциясының немесе* y *айнымалысына тәуелді* x *функциясының параметрлік түрде берілуі*, ал t айнымалысын *параметр* деп атаймыз.

Мысал 11:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ t \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$

Бұл жүйе $y = x^2, x \in (-\infty; +\infty)$ функциясының параметрлік түрде берілуі.

Негізгі элементар функциялар:

$y = x^{\alpha}$ - дәрежелік функция, $\alpha \in R$;

$y = a^{x}$ - көрсеткіштік функция $a > 0$;

$y = \log_a x$ $(y = \lg x, y = \ln x)$ - логарифмдік функция $a > 0$;

$y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \text{tgx}$, $y = ctgx$, $y = \cos ecx$, $y = \sec x$ - тригонометриялық функциялар;

$y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$, $y = \arccos ecx$,

$y = arcsecx$ - кері тригонометриялық функциялар.

Мысал 12: Негізгі элементар функциялардың әрқайсысының анықталу және мәндер облыстарын көрсетіп, графиктерін тұрғызыңыз.

ФУНКЦИЯНЫҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ

Көптеген тәуелділіктер $y=f(x)$ бір айнымалының функциясы түрінде берілуі мүмкін. Экономикалық мәселелерді шешкенде функциялық тәуелділіктің бар болуы, математикалық талдау әдістерін қолдануға мүмкіндік береді.

Мысал ретінде келесі функцияларды келтіруге болады:

1) *Тауардың бағасына байланысты сұраныс функциясы.* x -тауардың бағасы, y - тауарға сұраныс болса, онда сұраныс функциясы $y=f(x)$ түрінде жазылады. Мысалы, $y=\frac{200}{x+2}$, $y=e^{-3x}$.
2) *Тауардың сұранысына байланысты бағаның функциясы.*
   Егер x -тауарға сұраныс, y - тауардың бағасы болса, онда бағаның функциясы $y=f(x)$ түрінде беріледі. *Мысалы*, $y=5x^{-0,3}$.
3) Сатылған тауар санының тауар бағасына көбейтіндісі-жалпы түскен табысты береді және ол да сұраныс функциясы болып табылады. *Мысалы*, егер x - сұраныс, $\frac{100}{x+1}$ - баға болса, онда $y=\frac{100x}{x+1}$ - табыс функциясы болады.

4) Жалпы өндіріс шығындары F және орташа өндірістік шығындар (өзіндік құны) f - x - өндіріс көлемінің функциясы болып табылады, яғни: $F = F(x)$, $f(x) = \frac{F(x)}{x}$. *Мысалы*, $F(x) = 4x + 200$, $f(x) = 4 + \frac{200}{x}$.

5) Банкке салынған ақша көлемі - y функциясы, x - уақыттан тәуелді болады. Көпшілік жағдайда банкке салынған салымның "күрделі пайыздарын" есептеуге қажеттілігі туындайды.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Функция ұғымы.
2. Функцияның графигі ұғымы, мысалы.
3. Функцияның берілу тәсілдері.
4. Жұп, тақ функциялар, мысалы.
5. Периодты функциялар, мысалы.
6. Бірсарынды/ монотонды функциялар.
7. Кері функция ұғымы, мысалы.
8. Күрделі функция ұғымы, мысалы.
9. Айқындалмаған функция ұғымы, мысалы.
10. Параметрлік түрде берілген функция ұғымы, мысалы.
11. Негізгі қарапайым/ элементар функциялар.
12. Функцияның қолданбалары.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

