Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 5

КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ОБЪЕКТІЛЕРІ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. **Жазықтық теңдеулері;**
2. **Кеңістіктегі түзудің теңдеуі;**
3. **Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары;**
4. **Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш.**

ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Егер

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow P(x_0, y_0.z_0) \in P$$

болса, онда $F(x, y, z) = 0$ теңдеуі *P жазықтығының теңдеуі* деп аталады, мұндағы *x*, *y* және *z* айнымалылары *жазықтық* нүктелерінің *ағымдық координаталары*.

1) Жазықтықтың жалпы теңдеуі

Oxy жазықтығында сызықтық (бір дәрежелі) теңдеу *түзудің* теңдеуі болса, *Oxyz* кеңістігінде сызықтық теңдеу *жазықтықтың* теңдеуін береді.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

теңдеуі *жазықтықтың жалпы теңдеуі* деп аталады.

$\bar{n}(A, B, C)$ векторы (1) теңдеуімен берілген P жазықтығының *нормальдық* ($\bar{n} \perp P$) *векторы* болады.

Мысал 1: Координаталардың бас нүктесінен өтетін жазықтық теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Егер жазықтық координаталардың бас нүктесінен өтсе, онда бұл теңдеуді $O(0,0,0)$ нүктесінің координаталары қанағаттандыруы керек. $x=0,\ y=0,\ z=0$ координаталарын $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуіне қойсақ $D = 0$.

Сәйкесінше, координаталардың бас нүктесінен өтетін жазықтық теңдеуі

$$Ax + By + Cz = 0$$

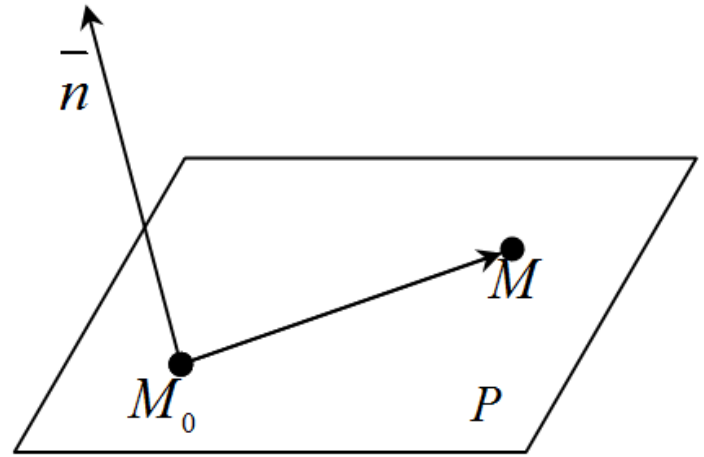
түрінде беріледі.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары:

Коэффициенттер мәні	*Жазықтық теңдеулері*	*Кеңістікте жазықтықтардың орналасуы*
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	координаттар басы арқылы өтеді
$A=0$	$By+Cz+D=0$	$\parallel Ox \quad (\perp yOz)$
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	$\parallel Oy \quad (\perp xOz)$
$C=0$	$Ax+By+D=0$	$\parallel Oz \quad (\perp xOy)$
$A=D=0$	$By+Cz=0$	Ox өсі арқылы өтеді
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	Oy өсі арқылы өтеді
$C=D=0$	$Ax+By=0$	Oz өсі арқылы өтеді
$A=B=0$	$Cz+D=0$	$\parallel xOy \quad (\perp Oz)$
$A=C=0$	$By+D=0$	$\parallel xOz \quad (\perp Oy)$
$B=C=0$	$Ax+D=0$	$\parallel yOz \quad (\perp Ox)$
$A=B=D=0$	$Cz=0$	xOy жазықтығы
$A=C=D=0$	$By=0$	xOz жазықтығы
$B=C=D=0$	$Ax=0$	yOz жазықтығы

2) $M_o(x_o, y_o, z_o)$ ***нүктесі арқылы*** $\bar{n}(A, B, C)$ ***векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі***

P - қарастырылып отырған жазықтық, ал $M(x, y, z)$ оның $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен өзгеше кез келген нүктесі болсын.



$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overline{M_o M}(x - x_o, y - y_o, z - z_o) \perp \bar{n}(A, B, C) \Leftrightarrow$$
$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \qquad (2)$$

(2) теңдеуі $M_o(x_o, y_o, z_o)$ *нүктесінен* $\bar{n}(A, B, C)$ *векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі.*

Мысал 2: $M_0(2;1;-1)$ нүктесі арқылы $\bar{n}(1;-2;3)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

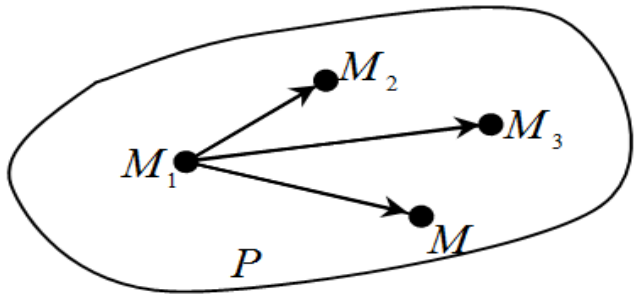
Шешімі: Есептің шарты бойынша $x_0 = 2,\ y_0 = 1,\ z_0 = -1,\ A = 1,\ B = -2,\ C = 3$. Осы мәндерді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

теңдеуіне қоя отырып ізделінді теңдеуді аламыз:

$$1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z - (-1)) = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z + 3 = 0.$$

3) $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$ ***үш нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі***



P - қарастырылып отырған жазықтық, ал $M(x,y,z)$ оның $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$ нүктелерінен өзгеше кез келген нүктесі болсын.

$M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1), \overline{M_1M_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1), \overline{M_1M}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$ компланар $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

(3) теңдеуі $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$ *нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.*

Мысал 3: $M_1(1,-2,0), M_2(3,-4,1), M_3(5,-3,6)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$x_1 = 1,\ y_1 = -2,\ z_1 = 0$$

$$x_2 = 3,\ y_2 = -4,\ z_2 = 1$$

және

$$x_3 = 5,\ y_3 = -3,\ z_3 = 6\ .$$

Осы мәндерді (3) түріндегі теңдеуіне қоя отырып

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-0 \\ 3-1 & -4-(-2) & 1-0 \\ 5-1 & -3-(-2) & 6-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -11(x-1)-8(y+2)+6z = 0\ .$$

Сонымен

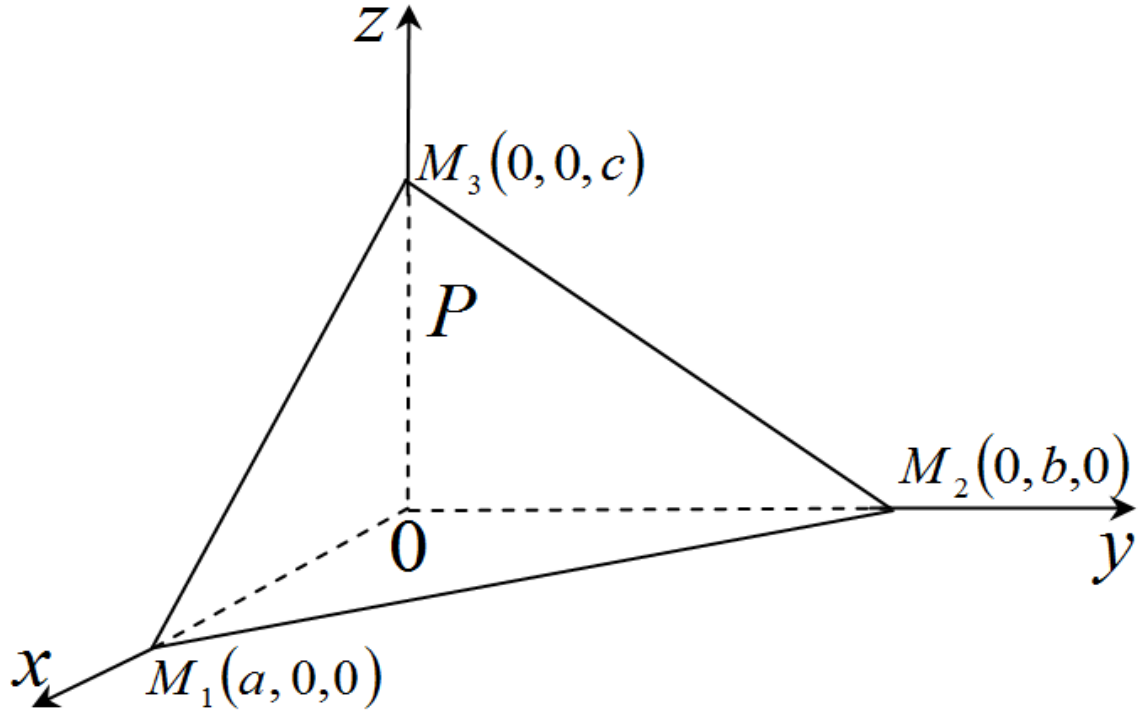
$-11x - 8y + 6z - 5 = 0$ немесе $11x + 8y - 6z + 5 = 0$

жазықтығының ізделінді теңдеуін аламыз.

4) Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (4)$$

түріндегі теңдеу *жазықтықтың кесінділік теңдеуі* деп аталады. Бұл жазықтық $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ нүктелерінен өтеді, яғни Ox, Oy, Oz өстерінен сәйкесінше a, b, c «кесінділерін» қияды.



5) Берілген нүктеден берілген жазықтыққа дейінгі қашықтық

$M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жалпы теңдеуімен берілген жазықтыққа дейінгі d қашықтығы

$$d = \frac{\left|Ax_o + By_o + Cz_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (5)$$

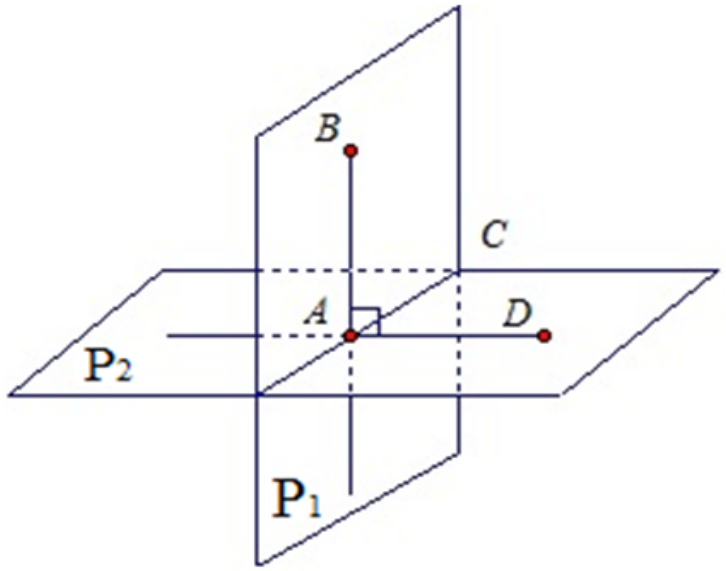
формуласы бойынша табылады.

Мысал 4: $5x-2y-3z-1=0$ жазықтығы мен $M_0(2;-1;4)$ нүктесінің арақашықтығын табыңыз.

Шешімі: жазықтық пен нүктенің арақашықтығын (5) формуласы бойынша табамыз:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|5\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot 4-1|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{38}}=\frac{\sqrt{38}}{38}.$$

6) Екі жазықтық арасындағы бұрыш



Жазықтықтар арасындағы бұрыш деп жазықтықтардың қиылысу сызығына жүргізілген перпендикулярлар арасындағы бұрышты айтады.

Жазықтықтар арасындағы бұрыш осы жазықтықтар түзетін *сүйір бұрыш* деп алынады. Егер жазықтықтар арасындағы бұрыш 90° болса, онда мұндай жазықтықтар *перпендикуляр* болады.

P_1, P_2 жазықтықтары, сәйкесінше, $A_1x+B_1y+C_1z+D=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D=0$ теңдеулерімен берілсін.

$\overline{n_1}(A_1,B_1,C_1)\perp P_1,\ \ \overline{n_2}(A_2,B_2,C_2)\perp P_2$ болғандықтан $\left(\widehat{P_1,P_2}\right)=\left(\widehat{\overline{n_1},\overline{n_2}}\right)$ деп алуға болады. Олай болса

$$\cos\left(\widehat{P_1,P_2}\right)=\cos\left(\widehat{\overline{n_1},\overline{n_2}}\right)=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Сонымен

$$\cos\left(\widehat{P_1,P_2}\right)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

7) Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

$\cos\left(\hat{P_1, P_2}\right) = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ теңдігінен жазықтықтардың келесі параллельдік және перпендикулярлық шарттары шығады:

а) $P_1 \,||\, P_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ - *жазықтықтардың параллельдік шарты*;

б) $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ - *жазықтықтардың перпендикулярлық шарты*.

Мысал 5: m -нің қандай мәнінде $3x-5y+mz-3=0$ және $x+3y+2z+5=0$ жазықтықтары өзара перпендикуляр болады?

Шешімі: жазықтықтардың $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$ перпендикулярлық шартына есептің шартынан шығатын $A_1=3,\ B_1=-5,\ C_1=m,\ A_2=1,$ $B_2=3, C_2=2$ мәндерін қоя отырып m -нің мәнін тауып аламыз:

$$3\cdot 1+(-5)\cdot 3+2\cdot m=0\Leftrightarrow 3-15+2m=0\Leftrightarrow 2m=12\Leftrightarrow m=6.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ



1. Жазықтық теңдеуі.
2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі.
3. Жазықтықтың нормаль векторы ұғымы.
4. $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы $\bar{n}(A, B, C)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі.
5. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.
6. Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі.
7. Берілген нүктеден берілген жазықтыққа дейінгі қашықтық.
8. Екі жазықтық арасындағы бұрыш.
9. Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары.

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУДІҢ ТЕҢДЕУІ

1) Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі:

Кеңістіктіктің l түзуі параллель емес және беттеспейтін екі P_1, P_2 жазықтықтарының қиылысу сызығы ретінде қарастырылады. Ал қиылысу түзуінің нүктелері екі жазықтыққа да тиісті болғандықтан, олар екі жазықтықтың да теңдеулерінің шешімдері, яғни осы теңдеулерден құрылған

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

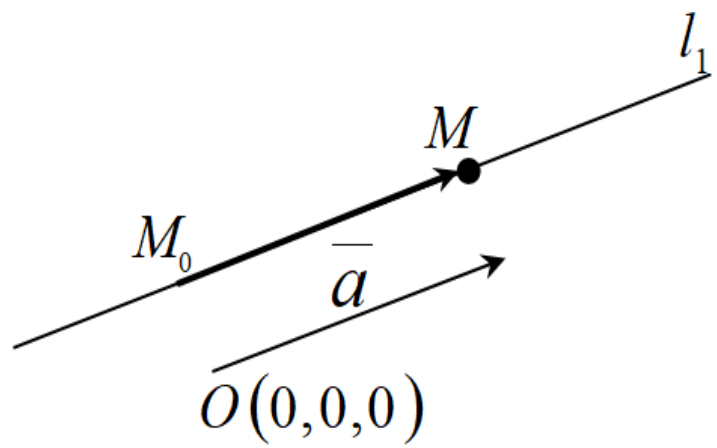
жүйесінің шешімдері ретінде анықталады.
(6) жүйесі *түзудің кеңістіктегі жалпы теңдеуі* деп аталады, мұндағы теңдеулер - сәйкесінше P_1, P_2 жазықтықтарының теңдеулері.

Бұдан

$$\bar{a} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \qquad (7)$$

векторының l түзуіне параллель болатыны (*l түзуінің бағыттаушы векторы* болатыны) шығады.

2) Берілген $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен берілген $\bar{a}(p;m;n)$ векторына параллель өтетін түзудің теңдеуі



$M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы $\bar{a}(p;m;n)$ векторына параллель өтетін түзудің теңдеуін жазу керек болсын.

$$M(x,y,z) \in l_1 \Leftrightarrow \overline{M_0M} \,||\, \bar{a} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \,||\, t \cdot \bar{a},$$

мұндағы t - қандай да бір сан - параметр

$$\Leftrightarrow \overline{M_0M}(x - x_o, y - y_o, z - z_o) = (t\bar{a})(tp;tm;tn) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_o = pt \\ y - y_o = mt \\ z - z_o = nt \end{cases} \qquad (8)$$

(8) теңдеуі *түзудің параметрлік теңдеуі* деп аталады.

$$\begin{cases} x - x_o = pt \\ y - y_o = mt \\ z - z_o = nt \end{cases}$$

жүйесінен, $p \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$ болғанда, *түзудің канондық теңдеуі* деп аталатын

$$\frac{x - x_o}{p} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n} \qquad (9)$$

теңдеуін аламыз.

Егер p, m, n сандарының ($\bar{a}(p;m;n)$ векторының координаталарының) біреуі нөлге тең, мысал үшін $p = 0, m \neq 0, n \neq 0$ болса, онда $\begin{cases} x - x_o = pt \\ y - y_o = mt \\ z - z_o = nt \end{cases}$ жүйесінен түзудің

$$\begin{cases} x = x_o \\ \dfrac{y - y_o}{m} = \dfrac{z - z_o}{n} \end{cases}$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

Егер де p, m, n сандарының екеуі нөлге тең, мысал үшін $p = 0, m = 0, n \neq 0$ болса, онда түзудің теңдеуі

$$\begin{cases} x = x_o \\ y = y_o \end{cases}$$

түрінде жазылады. $\bar{a}(p;m;n)$ *векторы (9) түзуінің бағыттаушы* ((9) түзуіне //) *векторы* болады.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі.
2. Берілген $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен берілген $\bar{a}(p;m;n)$ векторына параллель өтетін түзудің теңдеуі.
3. Түзудің параметрлік теңдеуі.
4. Түзудің канондық теңдеуі, бағыттаушы векторы.



ТҮЗУЛЕР АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ. ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК ЖӘНЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҚ ШАРТТАРЫ

1) Түзулер арасындағы бұрыш

l_1, l_2 түзулері сәйкесінше $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ теңдеулерімен берілсін.

$$\bar{a}_1(p_1;m_1;n_1)\|l_1,\quad \bar{a}_2(p_2,m_2,n_2)\|l_2$$

болғандықтан $\left(\hat{l_1,l_2}\right)=\left(\hat{\bar{a}_1,\bar{a}_2}\right)$ деп алуға болады. Олай болса

$$\cos\left(\hat{l_1,l_2}\right)=\cos\left(\hat{\bar{a}_1,\bar{a}_2}\right)=\frac{\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2}{|\bar{a}_1|\cdot|\bar{a}_2|}=\frac{p_1p_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{p_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{p_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Сонымен

$$\cos\left(\hat{l_1,l_2}\right)=\frac{p_1p_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{p_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{p_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

немесе l_1, l_2 *түзулері арасындағы бұрыш*

$$\left(\hat{l_1,l_2}\right)=\arccos\frac{p_1p_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{p_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{p_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

2) Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

а) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - l_1, l_2 *параллельдік шарты;*

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ - l_1, l_2 *перпендикулярлық шарты.*

Мысал 6: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ және $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ түзулерінің арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $p_1=1, m_1=-4, n_1=1$ және $p_2=2, m_2=-2, n_2=-1$. Бұдан түзулер арасындағы бұрышты табу формуласы бойынша

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}=\frac{1\cdot 2-4\cdot(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\hat{l_1, l_2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Канондық теңдеуімен берілген түзулер арасындағы бұрыш.
2. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары.



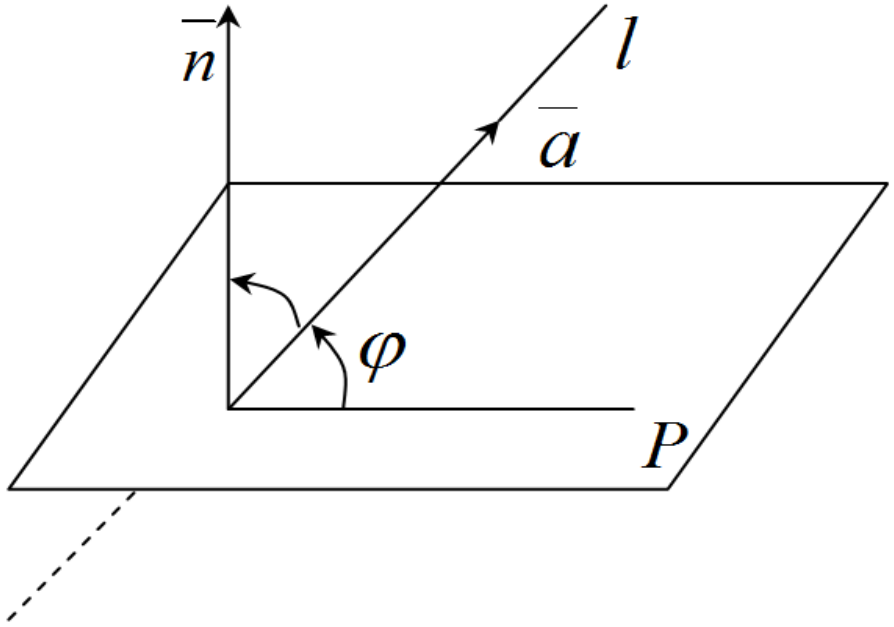
ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ

$$\frac{x-x_o}{p}=\frac{y-y_o}{m}=\frac{z-z_o}{n}$$

теңдеуімен берілген l түзуімен

$$Ax+By+Cz+D=0$$

теңдеуімен берілген P жазықтығының арасындағы бұрышты анықтау керек.



Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп түзу мен оның жазықтыққа түсірілген проекциясының арасындағы бұрышты айтамыз (сызбада φ бұрышы).

$$\bar{n}(A,B,C)\perp P,\quad \bar{a}(p,m,n)\parallel l\Rightarrow$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\left(\hat{\bar{n}},\bar{a}\right)\Rightarrow \sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\hat{\bar{n}},\bar{a}\right)\right)\Rightarrow \sin\varphi=\cos\left(\hat{\bar{n}},\bar{a}\right)\Rightarrow$$

$$\sin\varphi=\frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|}\Rightarrow \sin\varphi=\frac{Ap+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+m^2+n^2}}.$$

Салдар: $l \parallel P \Leftrightarrow Ap + Bm + Cn = 0$ - түзу мен жазықтықтың параллельдік шарты.

Мысал 7: $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ түзуі мен $3x+y+4=0$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша түзудің бағыттаушы векторы

$$\bar{a}(p,m,n)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\bar{i}-\bar{j},$$

ал нормаль векторы

$$\bar{n}(A,B,C)=(3,1,0).$$

Бұдан түзуі мен жазықтығының арасындағы бұрыш

$$\sin\varphi=\frac{Ap+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+m^2+n^2}}=\frac{3\cdot(-3)+1(-1)+0\cdot 0}{\sqrt{3^2+1^2+0^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+0^2}}=-1,$$

$$\varphi=\frac{3\pi}{2}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш.
2. Түзу мен жазықтықтың параллельдік шарты.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

