Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 4

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ОБЪЕКТІЛЕРІ

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Оху жазықтығындағы сызықтың теңдеуі;
2. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері;
3. Түзулердің қиылысу нүктесін табу;
4. Берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтық;
5. Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары;
6. Екінші ретті қисықтар.

ОХУ ЖАЗЫҚТЫҒЫНДАҒЫ СЫЗЫҚТЫҢ ТЕҢДЕУІ

$F(x, y)=0$ теңдеуі *L сызығының теңдеуі* деп аталады, егер

$$F(x_0, y_0)=0 \Leftrightarrow M(x_0, y_0)\in L$$

болса, мұндағы *x* және *y* айнымалылары сызықтың нүктелерінің *ағымдық координаталары*.

Мысал 1: $M_1(3;1)$ және $M_2(2;3)$ нүктелерінің қайсысы $2x-3y-3=0$ теңдеуімен берілген сызықтың бойында жатады?

Шешімі: Егер $F(x, y)=0$ - L сызығының теңдеуі болса,онда анықтама бойынша $M(x_0, y_0)\in L \Leftrightarrow F(x_0, y_0)=0.$

Біздің мысалда $F(x,y)=2x-3y-3$.

1) $M_1(3;1)\in L$ екенін тексерсек:

$$x_0=3,\ y_0=1.\quad F(x_0, y_0)=2\cdot 3-3\cdot 1-3=6-6=0\Rightarrow F(x_0, y_0)=0\Rightarrow M_1(3;1)\in L.$$

2) $M_1(2;3)\in L$ екенін тексерсек:

$$x_0=2,\ y_0=3.\quad F(x_0, y_0)=2\cdot 2-3\cdot 3-3=-8\Rightarrow F(x_0, y_0)\neq 0\Rightarrow M_1(2;3)\notin L.$$

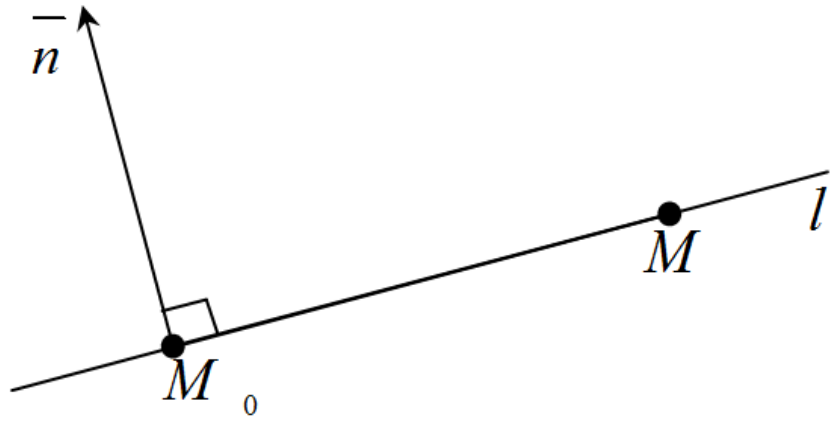
ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. L сызығының теңдеуі.
2. Ағымдық координаталар ұғымы.



ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУДІҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

1) Жазықтықта берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $\bar{n}(A, B)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі.



l қарастырылып отырған түзу болсын да, $M(x, y)$ - түзудің $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен өзгеше кез келген нүктесі болсын.

Онда $\overline{M_0M} \perp \bar{n}(A, B) \Leftrightarrow \overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0) \cdot \bar{n}(A, B) = 0 \Leftrightarrow$

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 . \qquad (1)$$

(1) теңдеуі - $M_o(x_o, y_o)$ *нүктесінен* $\bar{n}(A, B)$ *векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі*. $\bar{n}$ векторы *түзудің нормальдық векторы* деп аталады.

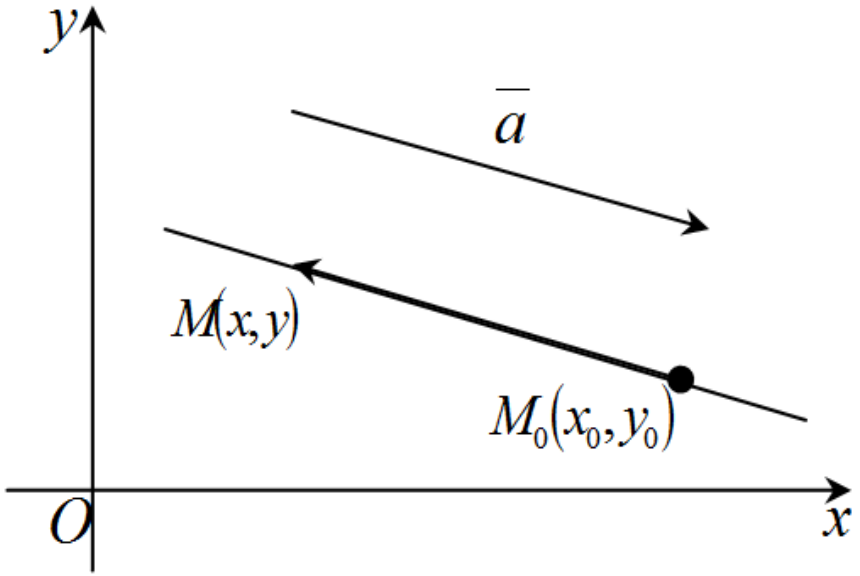
Мысал 2: $M(5;0)$ нүктесі арқылы $\bar{n}(1,0)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_o = 5, y_o = 0$ және $A = 1, B = 0$ болғандықтан $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$ теңдеуінен түзудің

$$1(x - 5) + 0(y - 0) = 0 \Rightarrow x - 5 = 0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

2) Берілген $M_o(x_o,y_o)$ нүктесінен $\bar{a}(a_x,a_y)$ векторына параллель жүргізілген түзудің теңдеуі.



$M_o(x_o,y_o)\neq M(x,y)$ және

$$M(x,y)\in l \Leftrightarrow \overline{M_0M}\,//\,\bar{a} \Leftrightarrow \overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0)=\lambda\bar{a}(a_x,a_y)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0)=(\lambda\bar{a})(\lambda a_x,\lambda a_y)\Leftrightarrow$$

$x-x_0=\lambda a_x$ және $y-y_0=\lambda a_y \Leftrightarrow$:

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y},\ a_x\neq 0, a_y\neq 0. \qquad (2)$$

Егер $a_x=0$ болса, онда $x=x_0$;

Егер $a_y=0$ болса, онда $y=y_0$.

$\bar{a}$ векторы түзудің *бағыттаушы векторы* деп аталады.

Мысал 3: $M(7;2)$ нүктесінен $\vec{a}=\{1;5\}$ векторына параллель өтетін түзу теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_o=7, y_o=2$ және $a_x=1, a_y=5$ болғандықтан

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y},\ a_x\neq 0, a_y\neq 0$$

теңдеуінен түзудің

$$\frac{x-7}{1}=\frac{y-2}{5}\Rightarrow 5(x-7)=y-2\Rightarrow 5x-y-33=0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

Мысал 4: $M(7;2)$ нүктесінен $\vec{a}=\{0;-2\}$ векторына параллель өтетін түзу теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_0=7,\ y_0=2,\ a_x=0,\ a_y=-2$ болғандықтан, есеп

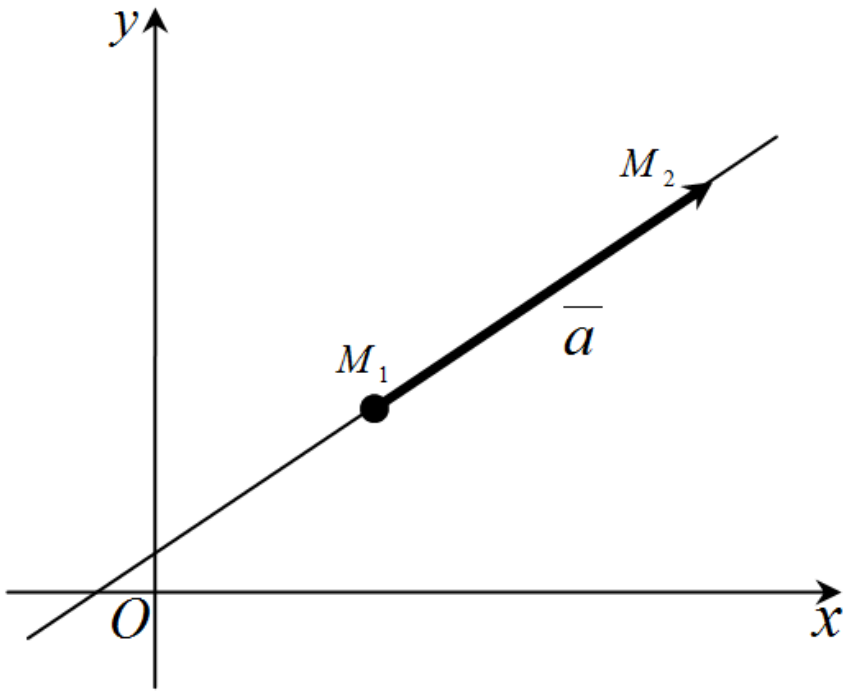
$$a_x=0$$

жағдайына жатады да, түзудің теңдеуі

$$x=x_0\text{, яғни } x=7$$

түрінде жазылады.

3) Берілген $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі.



Бұл арада 2) жағдайындағы $M_o(x_o, y_o)$ нүктесі ретінде $M_1(x_1, y_1)$ нүктесін, ал $\overline{a}$ векторы ретінде $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ векторын алсақ, $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$ теңдеуінен *екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін* аламыз:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},\ x_2 \neq x_1 \text{ және } y_2 \neq y_1; \qquad (3)$$

Егер $x_1 = x_2$ болса, онда $x = x_1$;

Егер $y_1 = y_2$ болса, онда $y = y_1$.

Мысал 5: $M_1(1;\,2)$ және $M_2(-1;\,0)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: $M_1(x_1,\,y_1)$ және $M_2(x_2,\,y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

теңдеуіне $x_1=1,\,y_1=2,\,x_2=-1,\,y_2=0$ мәндерін қою арқылы

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-2}{0-2}=\frac{x-1}{-1-1}\Rightarrow y-2=x-1\Rightarrow x-y+1=0$$

теңдеуін аламыз.

Мысал 6: $M_1(2;-1)$ және $M_2(5;-1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_1 = 2,\ y_1 = -1,\ x_2 = 5,\ y_2 = -1$ болғандықтан, есеп

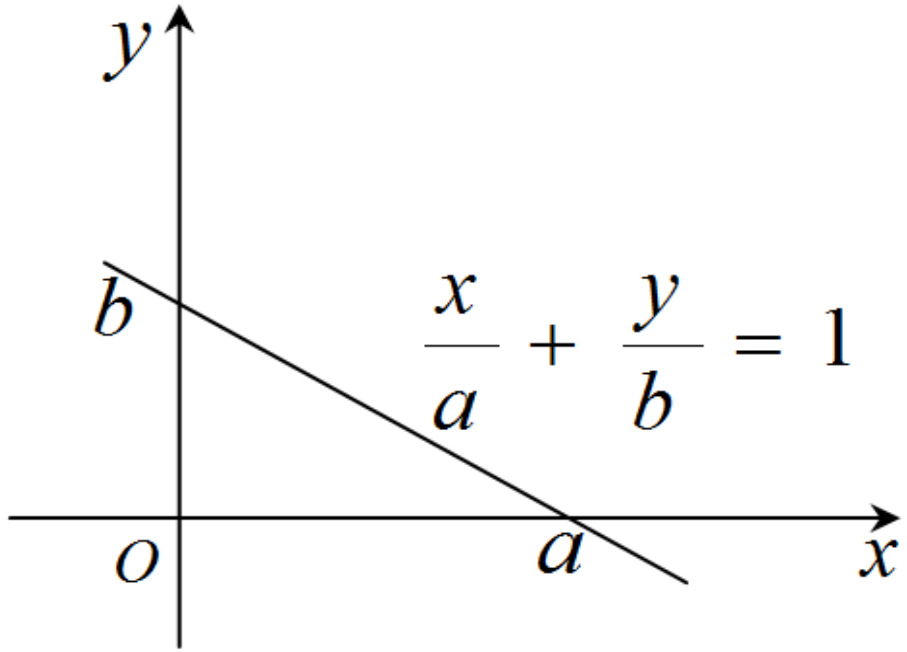
$$y_1 = y_2$$

жағдайына жатады да, түзудің теңдеуі

$$y = y_1,\ \text{яғни}\ \ y = -1$$

түрінде жазылады.

4) Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі.



Егер түзу координаталар өстерімен $M_1(a;0)$ және $M_2(0;b)$ нүктелерінде қиылысса, онда $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ теңдеуінен *түзудің «кесіндідегі» теңдеуі* деп аталатын

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4)$$

теңдеуін аламыз.

Мысал 7: Координатлар өстерін $M_1(5;0)$ және $M_2(0;3)$ нүктелерінде қиятын түзудің кесіндідегі теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ теңдеуіне $a=5, b=3$ мәндерін қою арқылы түзудің кесіндідегі

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

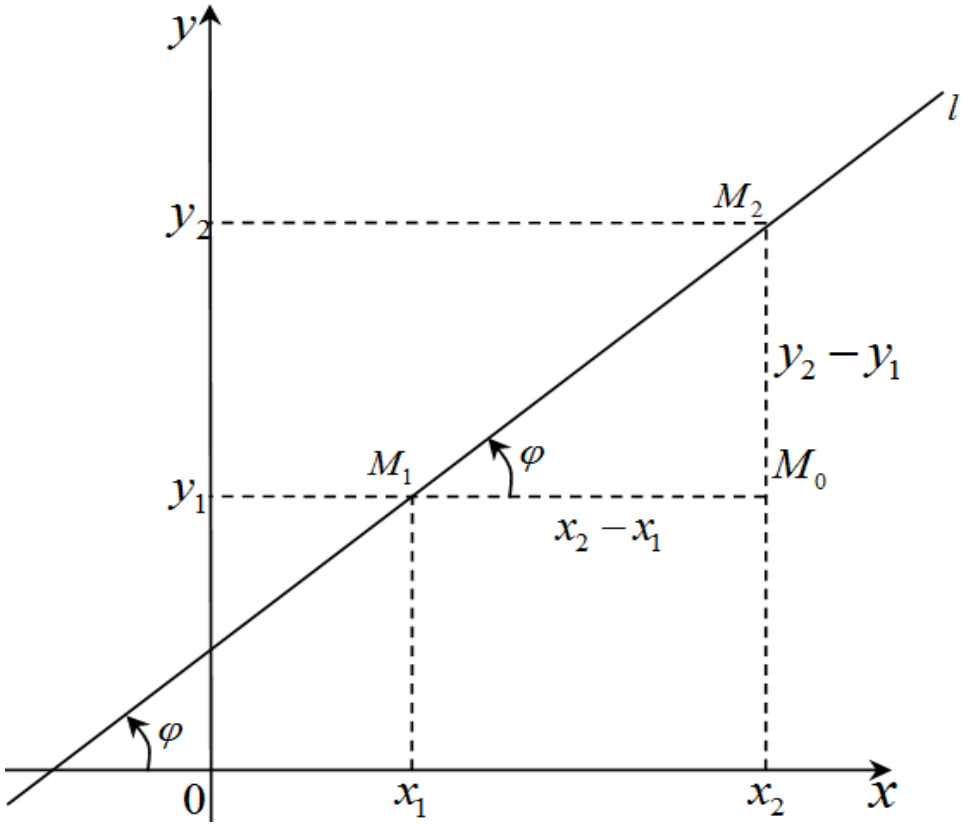
теңдеуін аламыз.

5) Берілген нүктеден берілген бұрышпен өтетін түзудің теңдеуі.

l түзуі $M_1(x_1, y_1)$ нүктесінен Ox өсімен φ бұрышын жасай өтсін.

$$\Delta M_1 M_0 M_2 \Rightarrow tg\varphi = \frac{|M_0M_2|}{|M_1M_0|} \Rightarrow tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = tg\varphi(x - x_1) \Leftrightarrow$$



$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5)$$

(5) - $M_1(x_1, y_1)$ *нүктесінен* Ox *өсімен* φ *бұрышын жасай өтетін түзудің теңдеуі.*

$k = tg\varphi$ саны түзудің *бұрыштық коэффициенті* деп аталады.

(5) теңдеуінде $-kx_1 + y_1 = b$ белгілеуін енгізу арқылы

$$y = kx + b \qquad (6)$$

түріндегі *түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін* аламыз.

Мысал 8: $M_1(-1;2)$ нүктесінен Ox өсімен $\frac{\pi}{3}$ бұрышын жасай өтетін теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $x_1 = -1,\ y_1 = 2$ және $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Түзудің бұрышты коэффициентін табамыз:

$$k = tg\,\varphi = tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ .$$

$y - y_1 = k(x - x_1)$ теңдеуіне $x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ k = \sqrt{3}$ мәндерін қою арқылы түзудің

$$y - 2 = \sqrt{3}(x + 1),$$

$$\sqrt{3}\,x - y + 2 + \sqrt{3} = 0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

6) Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі.

Жоғарыда келтірілген түзудің теңдеулерінің әрқайсысын

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

теңдеуінен түрлендіріп алуға, керісінше, олардың әрқайсысын (7) түріне келтіруге болады. Сондықтан (7) теңдеуі *түзудің жалпы теңдеуі* деп аталады.

(7) теңдеуімен берілген l түзуі үшін:

$\bar{n}(A, B)$ - *нормальдық вектор*, яғни $\bar{n}(A, B) \perp l$;

$\bar{a}(B, -A)$ - *бағыттаушы вектор*, яғни $\bar{a}(B, -A) // l$ болады.

Түзудің жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары:

1. Егер $C = 0$ болса, онда l түзуі координаталардың бас нүктесі арқылы өтеді;
2. Егер $A = 0$ болса, онда $l \,||\, OX$;
3. Егер $B = 0$ болса, онда $l \,||\, OY$;
4. $x=0$, $y=0$ - сәйкесінше OY, OX өстерінің теңдеулері.

Мысал 9: $5x-2y+11=0$ жалпы теңдеуімен берілген түзудің нормальдық және бағыттаушы векторларын табыңыз.

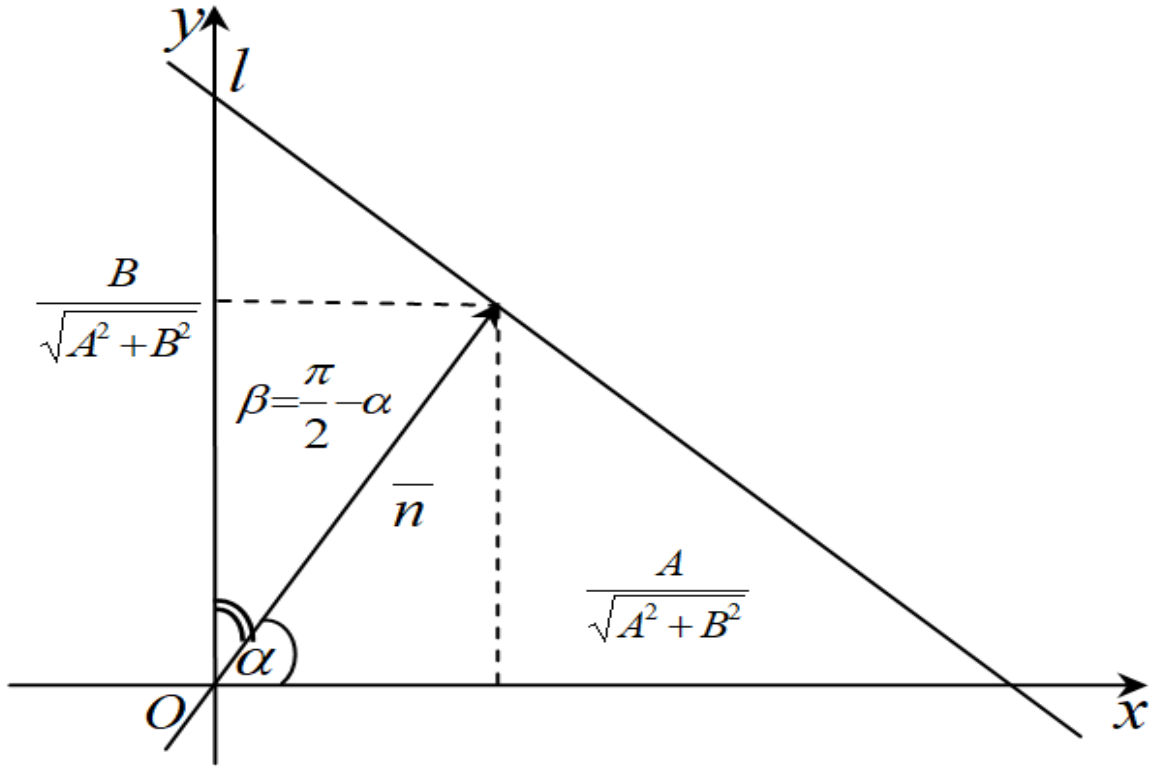
Шешімі: берілген теңдеуде $A=5,\ B=-2$ болғандықтан, $\bar{n}(5,-2)$- түзудің нормальдық, ал $\bar{a}(-2,-5)$ - бағыттаушы векторы болады.

7) Түзудің нормальдық теңдеуі.

Түзудің $Ax+By+C=0$ жалпы теңдеуінің екі жағын да $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ санына көбейткенде пайда болатын

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (8)$$

теңдеуі *түзудің нормальдық теңдеуі* деп аталады (бұл теңдеудің $\overline{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ нормальдық векторының ұзындығы 1-ге тең). μ *саны нормальдық көбейткіш* деп аталады.



Егер α - түзуінің

$$\overline{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

нормалдық векторының Ox өсімен жасайтын бұрышы болса, онда (8) теңдеуі

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0 \qquad (9)$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha,\ p=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}{|\overline{n}|}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{|\overline{n}|}=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Мысал 10: $12x-5y-65=0$ түзуінің жалпы теңдеуі берілген.

a) түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген;
b) түзудің кесіндідегі;
c) түзудің нормальдық

теңдеулерін құрыңыз.

Шешімі:

a) түзудің берілген жалпы теңдеуін y айнымалысына қатысты шешсек түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін аламыз:

$$5y=12x-65 \Rightarrow y=\frac{12}{5}x-13,$$ мұндағы $\frac{12}{5}=k, -13=b;$

b) түзудің берілген жалпы теңдеуіндегі бос мүшені теңдеудің оң жағына шығарып алып теңдеудің екі жағын да 65 санына бөлсек түзудің кесіндідегі теңдеуін аламыз:

$$12x-5y=65 \Leftrightarrow \frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=\frac{65}{65} \Leftrightarrow \frac{12}{65}x-\frac{1}{13}y=1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{65}{12}}+\frac{y}{-13}=1,$$

мұндағы $a=\frac{65}{12}, b=-13.$

c) Түзудің берілген жалпы теңдеуінің екі жағын да

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$$

нормальдық көбейткішіне көбейтсек

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$$

түріндегі түзудің нормальдық теңдеуін аламыз, мұндағы

$$\frac{12}{13} = \cos\alpha, \quad -\frac{5}{13} = \cos\beta, \quad 5 = p.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Жазықтықта берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $\bar{n}(A, B)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі.
2. Түзудің нормальдық векторы.
3. Берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $\bar{a}(a_x, a_y)$ векторына параллель жүргізілген түзудің теңдеуі.
4. Түзудің бағыттаушы векторы.
5. Берілген $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі.
6. Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі:
7. Берілген нүктеден берілген бұрышпен өтетін түзудің теңдеуі.
8. Түзудің бұрыштық коэффициенті.
9. Түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуі.
10. Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі.
11. Түзудің нормальдық теңдеуі.



ТҮЗУЛЕРДІҢ ҚИЫЛЫСУ НҮКТЕСІН ТАБУ

$A_1x+B_1y+C_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулерімен сәйкесінше берілген l_1 және l_2 түзулерінің қиылысу нүктесін анықтау есебін қарастырамыз.

Егер $M_0(x_0;y_0)$ *нүктесі* l_1, l_2 *түзулерінің қиылысу нүктесі* болса, онда ол l_1 түзуіне де және l_2 түзуіне де тиісті болады да, сызықтың теңдеуінің анықтамасы бойынша екі теңдеудің де шешімі, яғни осы екі теңдеуден тұратын

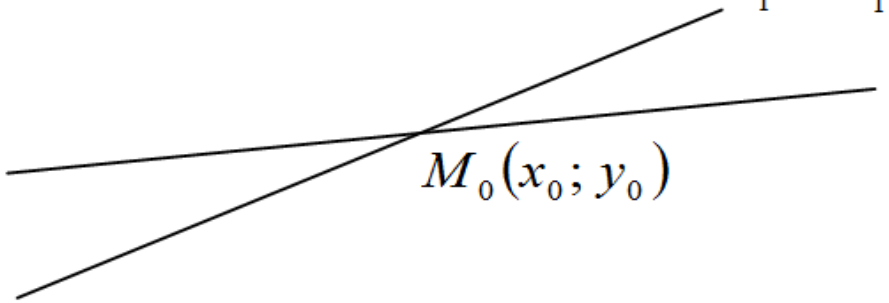
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

жүйесінің шешімі болады.

Сонымен *түзулердің қиылысу нүктесін табу* дегеніміз осы түзулердің теңдеуінен құрылған жүйенің шешімін табу деген сөз болады.

Үш жағдай болуы мүмкін:

1. (10) *жүйесінің жалғыз шешімі* $(x_0; y_0)$ *бар* $\Rightarrow M_0(x_0; y_0)$ - l_1, l_2 түзулерінің жалғыз қиылысу нүктесі;



2. (10) *жүйесінің шексіз көп шешімі бар* $\Rightarrow$ l_1, l_2 түзулері беттесіп жатыр;

$$\begin{cases} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

3. (10) *жүйесінің шешімі жоқ* $\Rightarrow l_1 \,//\, l_2$;

$$\begin{cases} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Мысал 11: $3x-4y-29=0$ және $3x+2y-5=0$ түзулерінің қиылысу нүктесін табыңыз.

Шешімі: түзулердің теңдеулерінен тұратын

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

жүйесін құрамыз

$$\begin{cases} 3x-4y-29=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases}.$$

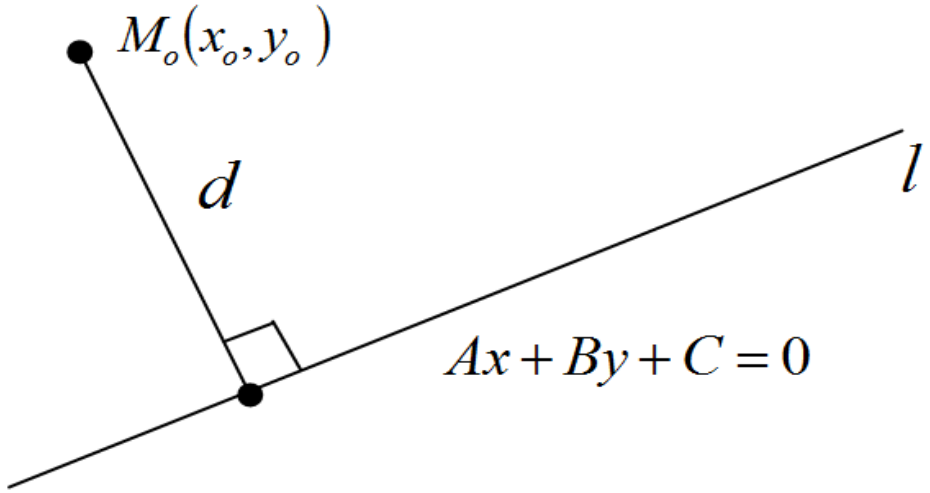
Жүйені шешіп $\begin{cases} x=\frac{13}{3} \\ y=-4 \end{cases}$, түзулердің $M\left(\frac{13}{3};-4\right)$ қиылысу нүктесін жазамыз.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Түзулердің қиылысу нүктесін табу.
2. Түзулер жүйесінің шешіміне қатысты үш жағдай.



БЕРІЛГЕН НҮКТЕДЕН БЕРІЛГЕН ТҮЗУГЕ ДЕЙІНГІ ҚАШЫҚТЫҚ



Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деп осы нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтамыз.

$M_o(x_o, y_o)$ *нүктесінен* $Ax + By + C = 0$ *теңдеуімен берілген түзуге дейінгі қашықтық*

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (11)$$

санына тең болады.

Ескерту. Түзу $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ нормальдық теңдеуімен берілсе, онда қашықтық

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta - p \right|$$

теңдігімен анықталады.

Мысал 12: $M_1(6;-1)$ нүктесінен $3x-4y+3=0$ түзуіне дейінгі d қашықтығын табыңыз.

Шешімі:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

формуласы бойынша $M_1(6;-1)$ нүктесінен $3x-4y+3=0$ түзуіне дейінгі ара қашықтық

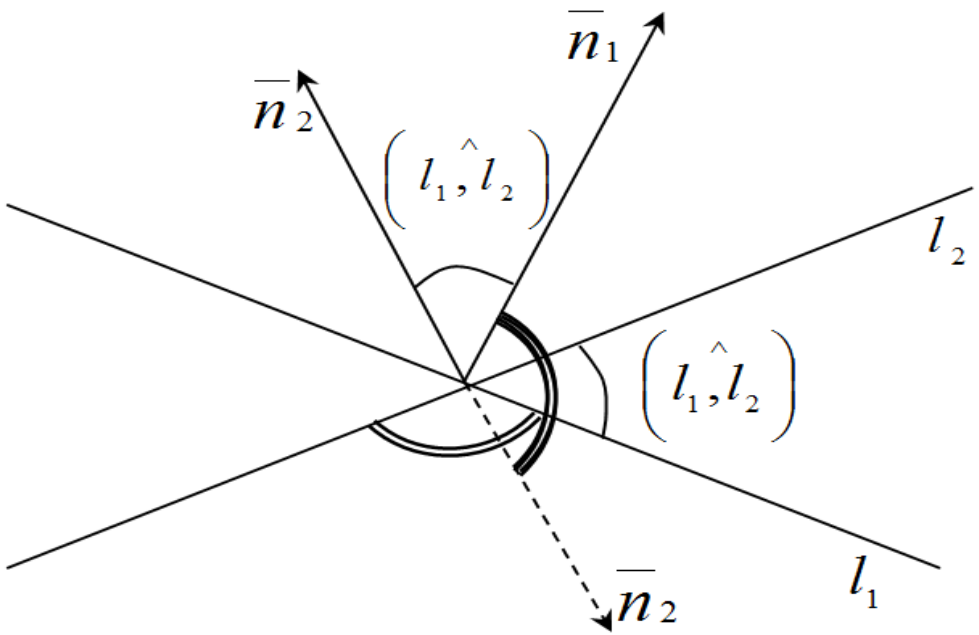
$$d=\frac{|3\cdot 6-4\cdot(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|25|}{\sqrt{25}}=5.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ теңдеуімен берілген түзуге дейінгі қашықтық.
2. $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ түзуіне дейінгі қашықтық.



ТҮЗУЛЕР АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ. ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК ЖӘНЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҚ ШАРТТАРЫ



l_1, l_2 түзулері, сәйкесінше, $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулерімен берілсін. $\bar{n}_1(A_1, B_1)$, $\bar{n}_2(A_2, B_2)$ олардың нормальдық векторлары болғандықтан

$$\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \left(\hat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right)$$

деп алуға болады.

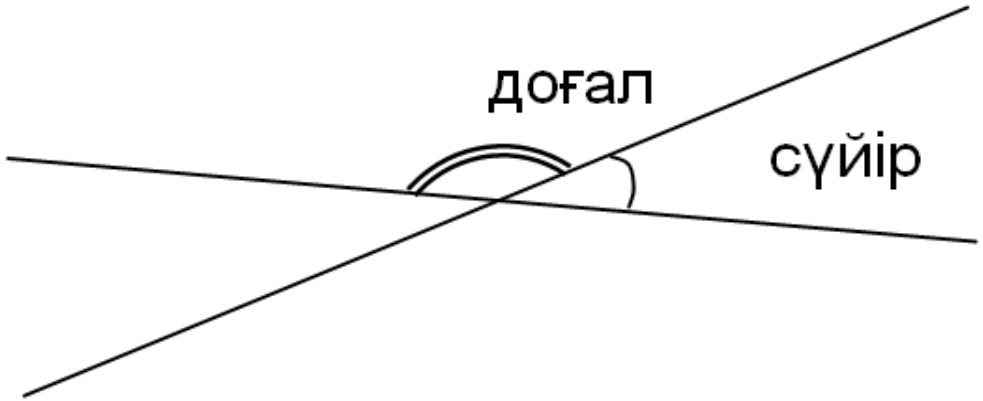
Онда

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \cos\left(\hat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (12)$$

немесе

$$\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (13)$$

Ескерту. Қилысқан түзулердің екі түрлі бұрышты – доғал және сүйір бұрышты шектеулері мүмкін.



Егер $\dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ саны – теріс (косинус теріс) болса, онда

$\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \arccos \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ формуласы бойынша *доғал бұрышты*, ал оң сан болса *сүйір бұрышты* аламыз.

Егер түзулер $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ *жалпы теңдеулерімен берілсе*, онда

а) $l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ - түзулердің параллельдік шарты;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ - түзулердің перпендикулярлық шарты.

Егер түзулер $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ *бұрыштық коэффициентті теңдеулерімен*, онда

а) $l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ - түзулердің параллельдік шарты;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2=-1$ - түзулердің перпендикулярлық шарты.

Мысал 13:

$l_1: \quad 2x+3y-2=0;$

$l_2: \quad x-3y+1=0;$

$l_3: \quad 5x-2y+3=0;$

$l_4: \quad 3x+y-7=0$

түзулерінің ішінен өзара перпендикуляр түзулерді көрсетіңіз.

Шешімі: Түзулердің перпендикулярлығын олардың жалпы теңдеулерінің коэффициенттері арқылы берілген

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

немесе олардың бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген $k_1 \cdot k_2 = -1$ перпендикулярлық шарттарының бірін қолданып тексеруге болады.

1) Түзулердің перпендикулярлығын олардың жалпы теңдеулерін қолданып тексеру.

$l_1: \quad 2x+3y-2=0 \Rightarrow A_1=2, B_1=3;$ $\qquad l_3: \quad 5x-2y+3=0 \Rightarrow A_3=5, B_3=-2;$

$l_2: \quad x-3y+1=0 \Rightarrow A_2=1, B_2=-3;$ $\qquad l_4: \quad 3x+y-7=0 \Rightarrow A_4=3, B_4=1.$

$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$ коэффициенттерінің ішінен перпендикулярлық шартты тек A_2, B_2, A_4, B_4 коэфициенттерінде ғана қанағаттандырады:

$$A_2 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_4 = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0.$$

Олай болса l_1, l_2, l_3, l_4 түзулерінің ішінде тек $l_2 \perp l_4$.

2) *Т*үзулердің перпендикулярлығын олардың бұрыштық коэффициенттерін қолданып тексеру.

Берілген түзулердің жалпы теңдеулерін бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеулерге түрлендіріп алып бұрыштық коэффициенттерін анықтаймыз:

$$l_1: \quad y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \Rightarrow k_1=-\frac{2}{3};$$

$$l_2: \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow k_2=\frac{1}{3};$$

$$l_3: \quad y=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow k_3=\frac{5}{2};$$

$$l_4: \quad y=-3x+7 \Rightarrow k_4=-3.$$

k_1, k_2, k_3 және k_4 бұрыштық коэффициенттерінің ішінде тек k_1, k_4 коэффициенттері ғана

$$k_2 \cdot k_4=\frac{1}{3}(-3)=-1$$

перпендикулярлық шартын қанағаттандырады. Олай болса l_1, l_2, l_3, l_4 түзулерінің ішінде тек $l_2 \perp l_4$.

Мысал 14: $M_0(2;1)$ нүктесі арқылы өтетін

a) $2x-3y+4=0$ түзуіне параллель;

b) $2x-3y+4=0$ түзуіне перпендикуляр

түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: $M_o(x_o,y_o)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

түрінде жазылады.

Есептің шарты бойынша $x_o=2, y_o=1$. Онда берілген түзудің теңдеуі

$$y-1=k(x-2)$$

түрінде жазылады.

Енді a) және b) шарттарын қанағаттандыратын k бұрыштық коэффициентінің мәнін анықтау керек.

Түзудің $2x-3y+4=0$ теңдеуінен k_1 бұрыштық коэффициентін табамыз:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\Rightarrow k_1=\frac{2}{3}.$$

a) Түзулердің параллельдік шарты бойынша $y-1=k(x-2)$ және $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ түзулері тек $k=k_1=\frac{2}{3}$ болғанда ғана параллель болады. k бұрыштық коэффициентінің табылған $k=\frac{2}{3}$ мәнін $y-1=k(x-2)$ теңдеуіне қойсақ $2x-3y+4=0$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін аламыз:

$$y-1=\frac{2}{3}(x-2)\Rightarrow 3y-3=2x-4\Rightarrow 2x-3y-1=0.$$

b) Түзулердің перпендикулярлық шарты бойынша $k_1\cdot k=-1$.

Бұл теңдіктен $k=\frac{-1}{k_1}=\frac{-1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$ болатыны шығады.

Бұрыштық коэффициентінің табылған $k=-\frac{3}{2}$ мәнін $y-1=k(x-2)$ теңдеуіне қойсақ $2x-3y+4=0$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуін аламыз:

$$y-1=-\frac{3}{2}(x-2)\Rightarrow 2y-2=-3x+6\Rightarrow 3x+2y-8=0.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Түзулер арасындағы бұрыш.
2. Түзулердің параллельдік шарттары.
3. Түзулердің перпендикулярлық шарттары.

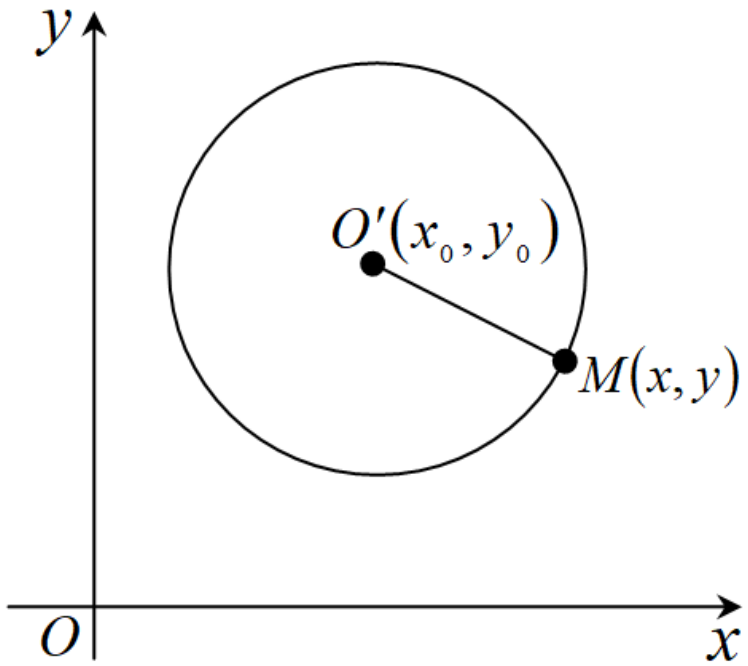


ЕКІНШІ РЕТТІ ҚИСЫҚТАР

Екінші ретті қисық деп теңдеуі төменгі дәрежелі теңдеулерге жіктелмейтін екінші дәрежелі теңдеу болатын қисықты айтамыз.

Шеңбер, эллипс, гипербола және *парабола* жазықтықтағы екінші ретті қисықтар болады.

Шеңбер және оның теңдеуі. *Шеңбер* деп жазықтықтың берілген нүктеден берілген қашықтықта орналасқан нүктелерінің жиынын айтамыз. Берілген нүкте – *шеңбердің центрі*, берілген қашықтық - *шеңбердің радиусы* деп аталады.



Егер $O'(x_0, y_0)$ нүктесі - шеңбердің центрі, ал R - шеңбердің радиусы болса, онда анықтама бойынша $|O'M| = R$ теңдігі орынды болады. Бұл теңдікте координаталарға көшсек

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \qquad (14)$$

түріндегі *шеңбердің қарапайым теңдеуін* аламыз.

Егер центрі $O(0,0)$ координаталардың бас нүктесінде жатса, онда *шеңбер теңдеуі*

$$R^2 = x^2 + y^2 \qquad (15)$$

түрінде жазылады.

Мысал 15: Центрі $O'(8,-2)$, радиусы $R=7$ шеңберінің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: $R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ теңдеуіне $x_0=8,\ y_0=-2,\ R=7$ мәндерін қойсақ шеңбердің

$$(x-8)^2+(y-(-2))^2=7^2 \text{ немесе } (x-8)^2+(y+2)^2=49$$

түріндегі шеңбердің теңдеуін аламыз.

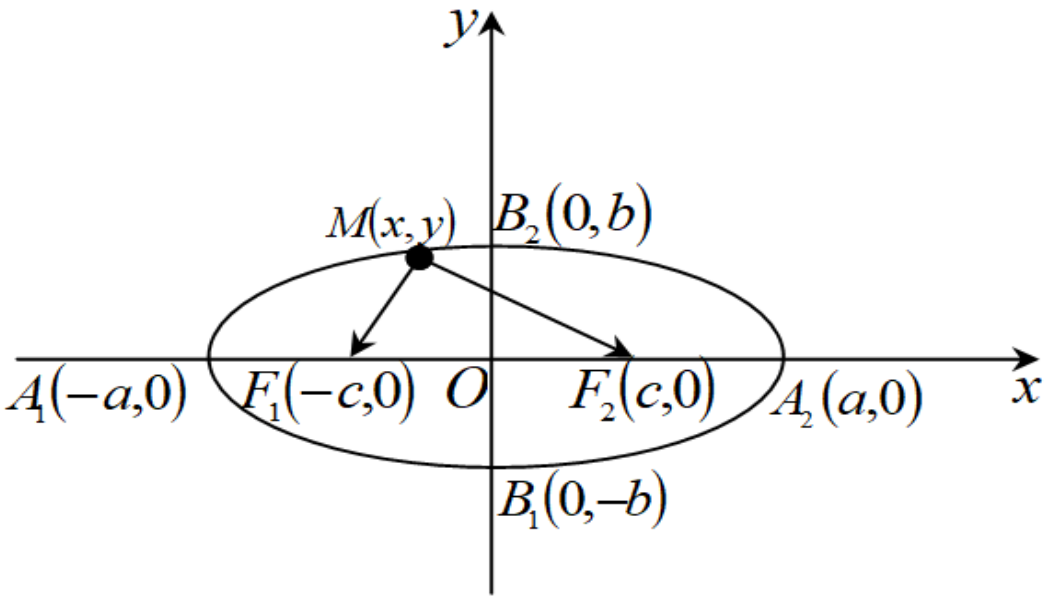
Мысал 16: $x^2+y^2+8x-4y-61=0$ теңдеуінің шеңбердің теңдеуі болатынын көрсетіп және оның центрі мен радиусын табу керек.

Шешімі: теңдеудің сол жағындағы өрнектен x немесе y айнымалыларына қарағанда толық квадраттарын бөліп аламыз:

$$(x^2+2\cdot 4x+4^2)+(y^2-2\cdot 2y+2^2)-61-4^2-2^2=0$$
$$(x+4)^2+(y-2)^2=9^2$$

Берілген теңдеу центрі $B(-4,2)$, радиусы $R=9$ болатын шеңбердің теңдеуі.

Эллипс және оның теңдеуі. *Эллипс* деп жазықтықтың берілген екі нүктесіне дейінгі қашықтықтарының қосындысы тұрақты және осы екі нүктелердің ара қашықтығынан артық болатын жазықтықтың нүктелерінің жиынын айтамыз.



Берілген екі нүкте *эллипстің фокустары* деп аталады. $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ нүктелері эллипстің фокустары, ал $M(x, y)$ ағымдық нүктесінен фокустарға дейінгі қашықтықтардың қосындысы $2a$ болса, онда эллипстің анықтамасы бойынша

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

теңдігі орынды болады. Бұл теңдікті нүктелердің координаталары арқылы жазып алып, $b^2 = a^2 - c^2$ ауыстыруын енгізсек

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (16)$$

түріндегі *эллипстің қарапайым теңдеуін* аламыз.

- a және b эллипстің сәйкесінше *үлкен* және *кіші жарты өстері*;
- $A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,-b), B_2(0,b)$ - *эллипс төбелері*;
- $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - *эллипс эксцентриситеті*;
- $|F_1F_2| = 2c$ - *фокальдық қашықтық.*

Егер $a = b$ болса, онда

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (17)$$

шеңбер теңдеуін аламыз.

Мысал 17: $M(8,0)$ нүктесінен өтетін фокальдық қашықтығы 14-ке тең эллипстің теңдеуін жазу керек.

Шешімі: $M(8,0)$ нүктесі эллипске тиісті болғандықтан ол $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуінің шешімі болады, яғни

$$\frac{8^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$$

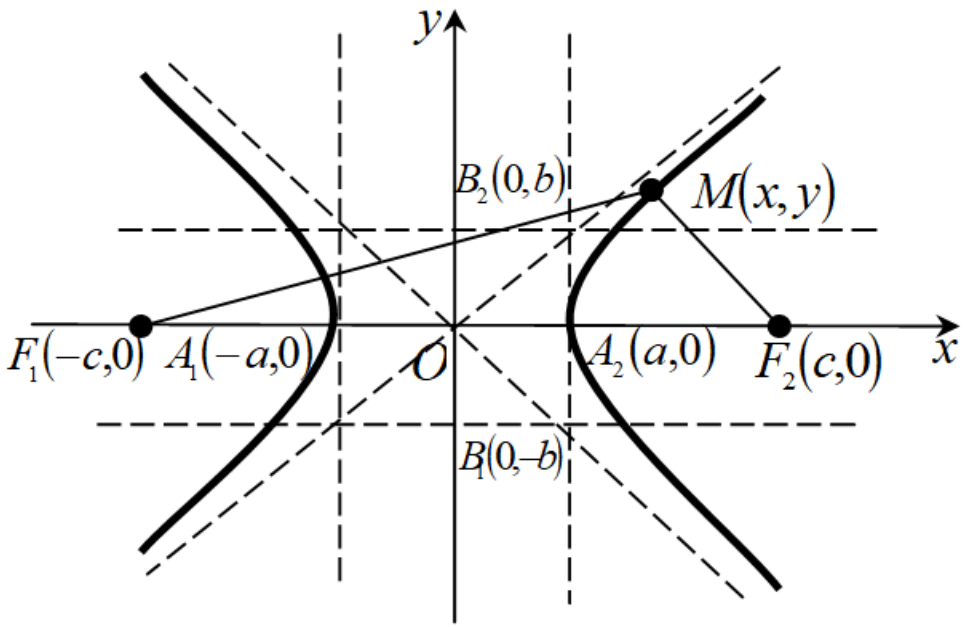
теңдігі орындалады. Бұдан $a^2=64$ болатынын аламыз. b^2 санын $b^2=a^2-c^2$ теңдігін пайдаланып табамыз. Есептің шарты бойынша фокальдық қашықтық $2c=14$, яғни $c^2=49$. Онда $b^2=64-49=15.$

$a^2=64, b^2=15$ мәндерін $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуіне қойсақ эллипстің

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{15}=1$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

Гипербола және оның теңдеуі. *Гипербола* деп жазықтықтың берілген екі нүктесіне дейінгі қашықтарының айырмасының модулі тұрақты және осы екі нүктелердің ара қашықтығынан кем болатын жазықтықтың нүктелерінің жиынын айтамыз. Берілген екі нүкте *эллипстің фокустары* деп аталады.



$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ нүктелері гиперболаның фокустары, ал $M(x,y)$ ағымдық нүктесінен фокустарға дейінгі қашықтықтардың айырмасының модулі $2a$ болса, онда эллипстің анықтамасы бойынша

$$\left|\left|F_1M\right|-\left|F_2M\right|\right|=2a$$

теңдігі орынды болады.

Бұл теңдікті нүктелердің координаталары арқылы жазып алып, $b^2=c^2-a^2$ ауыстыруын енгізсек,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (18)$$

түріндегі *гиперболаның қарапайым теңдеуін* аламыз.

- a және b гиперболаның сәйкесінше *нақты* және *жорамал жарты өстері;*
- $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ - *гипербола төбелері;*
- $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - *гипербола эксцентриситеті*.

Мысал 18: $12x^2 - 5y^2 = 120$ теңдеуі гипербола теңдеуі болатынын көрсетіп және оның фокустарын табыңыз.

Шешімі: берілген теңдеудің екі жағын да 120 санына бөлсек гиперболаның

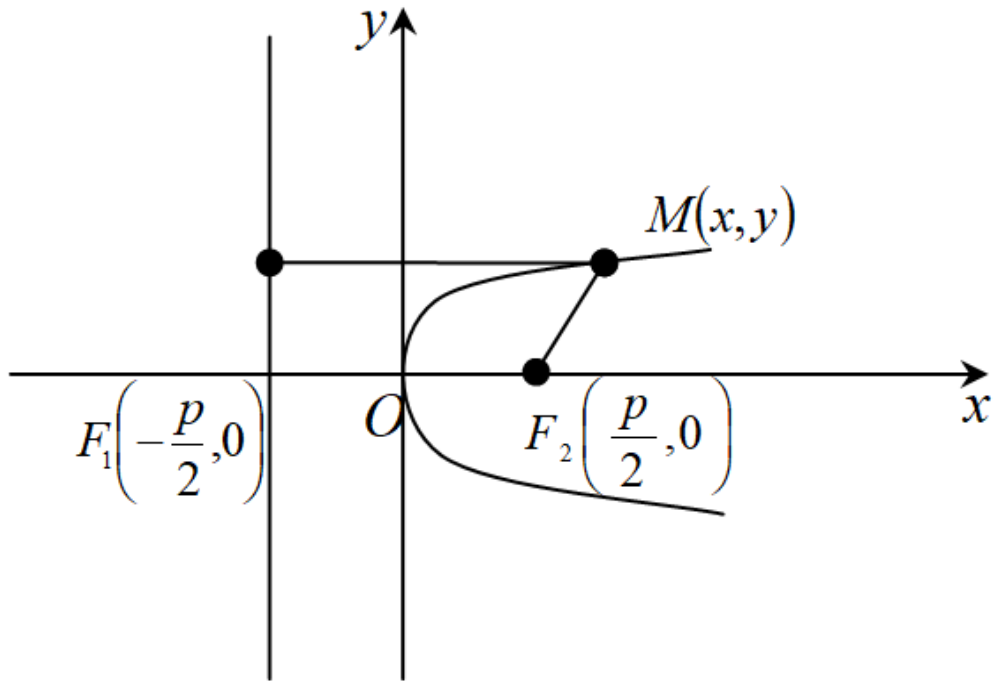
$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{24} = 1$$

түріндегі мәндеріне сәйкес теңдеуін аламыз.
$b^2 = c^2 - a^2$ теңдігіне $a^2 = 10, b^2 = 24$ мәндеріне сәйкес $c^2 = 34$, яғни $c = \sqrt{34}$ мәнін аламыз. Олай болса гиперболаның фокустары

$$F_1(-c,0) = F_1\left(-\sqrt{34},0\right) \text{ және } F_2(c,0) = F_2\left(\sqrt{34},0\right)$$

нүктелері болады.

Парабола және оның теңдеуі. *Парабола* деп жазықтықтың берілген түзуі мен берілген нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелерінің жиынын айтамыз.



Берілген түзу – *параболаның директрисасы*, берілген нүкте *параболаның фокусы* деп аталады.

Директрисасы $x=-\frac{p}{2}$ түзуі, фокусы $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ нүктесі болатын *параболаның қарапайым теңдеуі*

$$y^2=2px \qquad (20)$$

түрінде жазылады.

$O(0,0)$ нүктесі $y^2=2px$ *параболасының төбесі* деп аталады.

$y^2 = 2px$ *теңдеуімен берілген параболаның қасиеттері:*

1) парабола $O(0,0)$ бас нүктесінен өтеді;
2) парабола Ox өсіне симметриялы, себебі теңдеуде y айнымалысы жұп дәрежелі;
3) $p > 0$ болса параболаның тармақтары оңға қарай бағытталған ($y^2 \geq 0$ және $p > 0 \Rightarrow x \geq 0$);
4) $p < 0$ болса параболаның тармақтары солға қарай бағытталған ($y^2 \geq 0$ және $p < 0 \Rightarrow x \leq 0$).

Егер параболаның фокусы ретінде $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ нүктесін, ал директрисасы ретінде $y = -\frac{p}{2}$ түзуін алсақ, онда *параболаның қарапайым теңдеуі*

$$x^2 = 2py$$

түрінде жазылады.

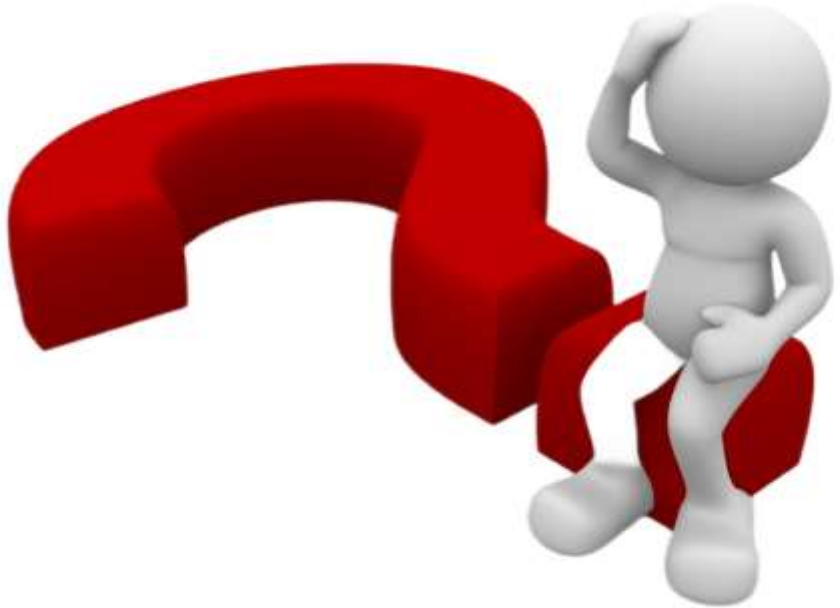
Мысал 19: $y^2 = 3x$ параболасының фокусы мен директрисасын табу керек.

Шешімі: параболаның $y^2 = 2px$ теңдеуімен есептің шартынан $2p = 3$ теңдігін аламыз. Бұл теңдіктен $p = \frac{3}{2}$ болатындығы шығады. $p = \frac{3}{2}$ мәнін қою арқылы $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ фокусы мен $x = -\frac{p}{2}$ директрисасын табамыз:

$F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ - фокус, $x = -\frac{3}{4}$ - директриса.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Шеңбер анықтамасы, теңдеуі.
2. Эллипс анықтамасы, теңдеуі.
3. Гипербола анықтамасы, теңдеуі.
4. Парабола анықтамасы, теңдеуі.



ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

