Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 3

ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Векторлар;
2. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі және оның қасиеттері;
3. Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері;
4. Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері;
5. Векторлардың қолданбалары.

Векторлар

Тек сандық мәнімен анықталатын шама *скалярлық шама* деп аталады (ұзындық, аудан, көлем, температура, жұмыс, масса).

Кейбір шамалар өзінің сандық мәндерімен қатар бағытымен бірге анықталады (күш, жылдамдық, үдеу). Бұл шамалар *векторлық шамалар* деп аталады.

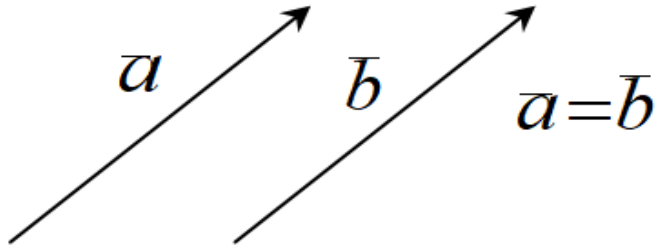
Анықтама 1. *Вектор (геометриялық вектор)* деп бағытталған кесіндіні айтамыз.

Вектор $\overline{a}$ түрінде белгіленеді (Сурет 1 а). Басы A нүктесі, ұшы B нүктесі болатын вектордың белгіленуі (Сурет 1 б): $\overline{AB}$.



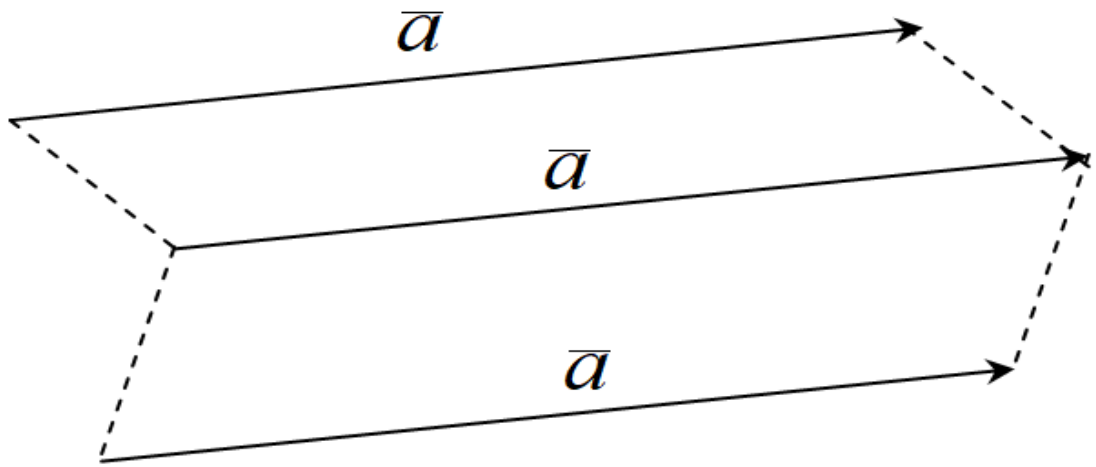
Сурет 1

a) бірдей ұзындықты бағыттас векторлардың *тең векторлар* болатыны шығады (Сурет 2);



Сурет 2

b) *параллель көшіру векторды өзгертпейтіндігі* шығады, себебі параллель көшіргенде ұзындық та, бағыт та сақталады, яғни вектор да сақталады (Сурет 3).

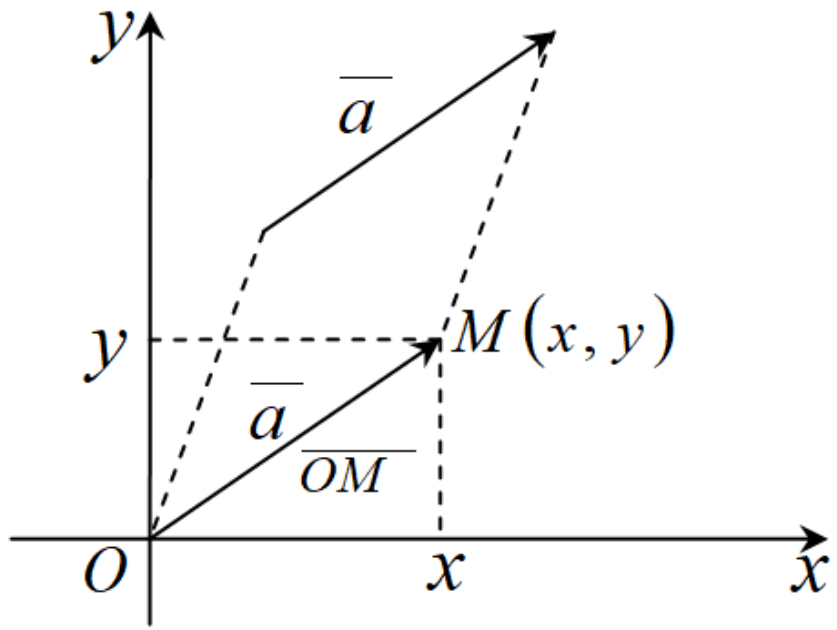


Сурет 3

Сонымен бірдей ұзындықты және бірдей бағытталған барлық кесінділер бір векторды анықтайды екен де, векторды беру үшін осы бағытталған кесінділердің қалауымызша алынған біреуін көрсету жеткілікті болады екен.

Егер біз басы координаталар жүйесінің бас нүктесінде орналасқан $\overline{OM}$ түріндегі кесіндіні алсақ, онда біз векторды, оның ұзындығы мен бағытын көрсетпей-ақ, тек М ұшының координаталары, яғни сандар арқылы беруге мүмкіндік аламыз. Векторды осылай анықтауды *Oxy* жазықтығының векторы арқылы көрсетейік.

$\overline{a}$ векторы берілген $\Leftrightarrow$ $\overline{a}$ векторына сәйкес $\overline{OM}$ векторы берілген $\Leftrightarrow$ Вектордың басы $O(0,0)$ белгілі нүкте болғандықтан, вектордың ұшы M нүктесі берілген $\Leftrightarrow$ M нүктесінің координаталары, яғни реттелініп алынған (x, y) қос саны берілген (Сурет 4).



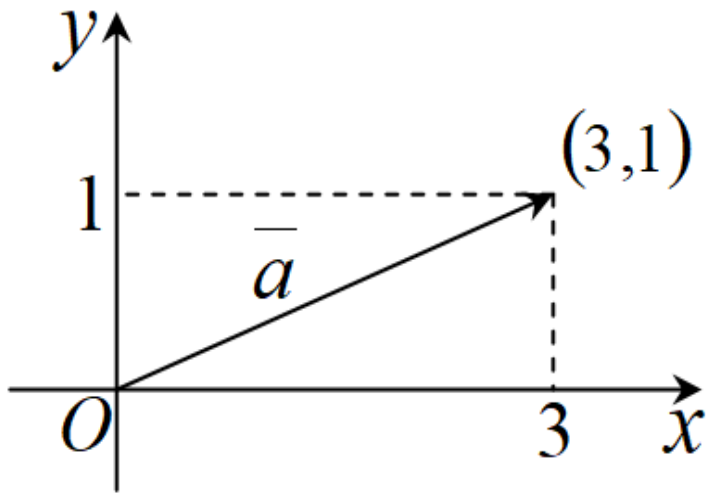
Сурет 4

$\overline{a} = (x, y)$ немесе $\overline{a}(x, y)$ - $\overline{a}$ *векторының координаталық түрде жазылуы*, (x, y) - $\overline{a}$ *векторының координаталары*.

Координаталық түрде жазылған векторды, қысқаша *координата-лардағы вектор* деп те атай береміз.

Мысал 1: $\bar{a}(3,1)$ векторын көрсетіңіз.

Шешімі: Oxy жазықтығында $\bar{a}(3,1)$ векторын төмендегідей сызамыз (Сурет 5):



Сурет 5

Ескерту. $Oxyz$ кеңістігінің координаталардағы векторы $\bar{a}=(x,y,z)$ немесе $\bar{a}(x,y,z)$ түрінде жазылады.

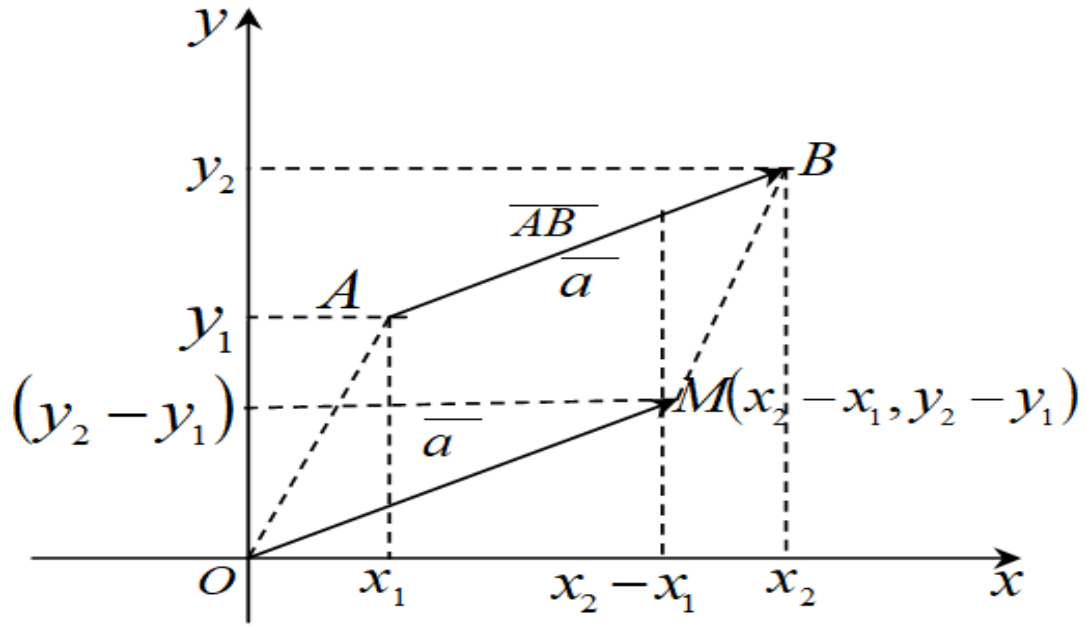
Тұжырым 1.

$$\overline{a}(a_x, a_y, a_z) = \overline{b}(b_x, b_y, b_z) \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z . \quad (1)$$

Басы $A(x_1, y_1)$ нүктесінде, ұшы $B(x_2, y_2)$ нүктесінде орналасқан $\overline{AB}$ векторының координаталық түрі (Сурет 6):

$$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Егер $\overline{AB} \in Oxyz \Rightarrow \overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.



Сурет 6

Мысал 2: $A=(3;-1;2),\ B=(4;0;-5)$ нүктелері берілген. $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ векторларының координаталарын табыңыз.

Шешімі:

$$\overline{AB}=(4-3;0-(-1);-5-2)=(1;1;-7);$$
$$\overline{BA}=(3-4;-1-0;2-(-5))=(-1;-1;7).$$

Анықтама 2. *Нөлдік вектор* деп нүктені айтамыз. Нөлдік вектор $\overline{O}$ түрінде белгіленеді.

- Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең;
- $\overline{O}$ векторында бағыт болмайды;
- $\overline{O}+\overline{a}=\overline{a}.$

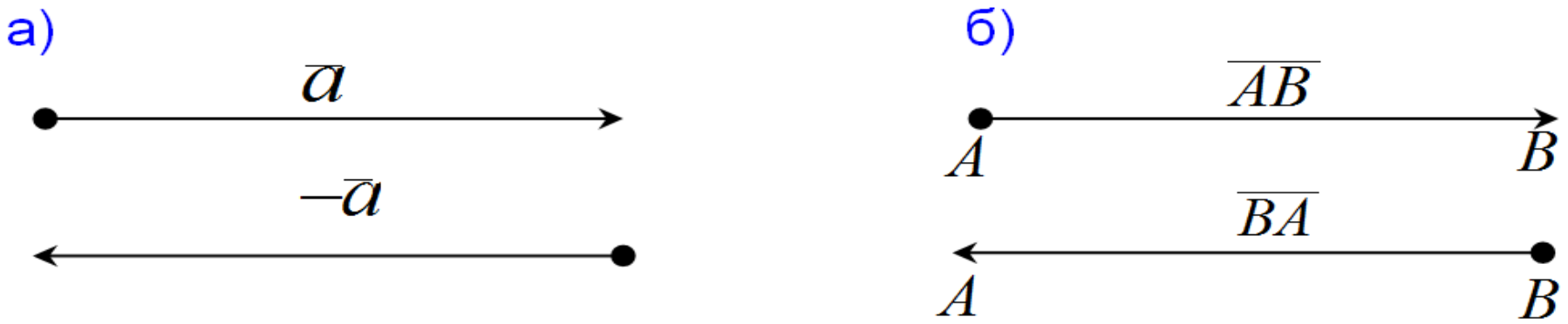
Егер

$$\overline{O}\in Oxy \Rightarrow \overline{O}=\overline{O}(0,0);$$

$$\overline{O}\in Oxyz \Rightarrow \overline{O}=\overline{O}(0,0,0).$$

Анықтама 3. Ұзындықтары бірдей, бағыттары қарама-қарсы векторларды *қарама-қарсы векторлар* деп атаймыз. $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы вектор $-\bar{a}$ түрінде белгіленеді (Сурет 7 а, б).

Анықтамадан $-\overline{AB}=\overline{BA}$ болатыны шыгады.



Сурет 7

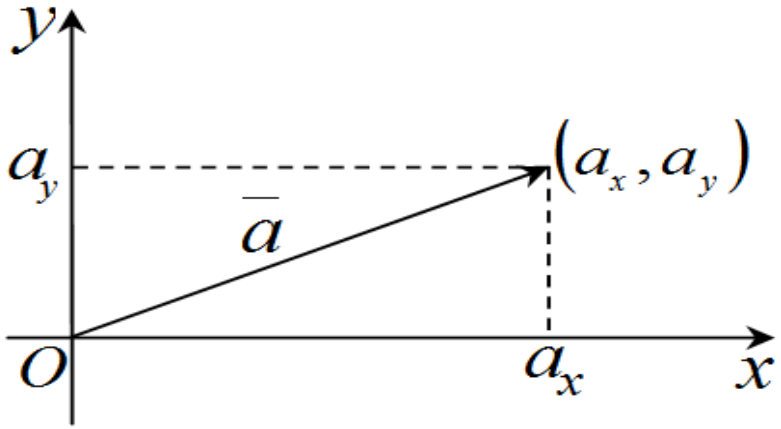
$$-\overline{AB}=\overline{BA},\ \overline{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,z_2-z_1),$$
$$-\overline{AB}=\overline{BA}(x_1-x_2,\ y_1-y_2,z_1-z_2)=\overline{BA}(-(x_2-x_1),-(y_2-y_1),-(z_2-z_1)).$$

қарама-қарсы векторлардың сәйкес координаталары қарама-қарсы сандар болады.

Мысал 3: $\bar{a}=(-2;3;5)\Rightarrow-\bar{a}=(2;-3;-5).$

Анықтама 4. $\bar{a}$ *векторының ұзындығы (модулі)* деп оның кесіндісінің ұзындығын айтамыз.

$\bar{a}$ векторының ұзындығы $|\bar{a}|$ түрінде белгіленеді (Сурет 8).



Сурет 8

$$|\bar{a}(a_x, a_y)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \bar{a} \in Oxy;$$

$$|\bar{a}(a_x, a_y, a_z)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \bar{a} \in Oxyz;$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad A(x_1, y_1), B(x_2, y_2);$$

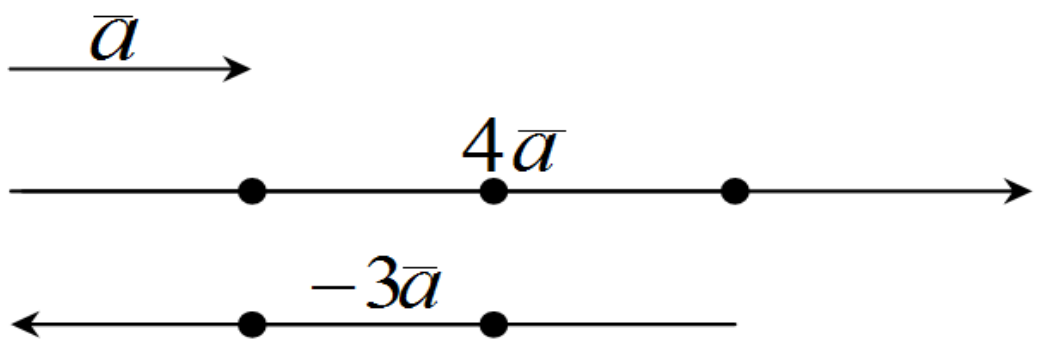
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2).$$

Векторларға қолданылатын амалдар:

1) *Векторды санға көбейту.*

α *санымен* $\bar{a}$ *векторының көбейтіндісі* деп ұзындығы $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$ санына тең болатын және $\alpha > 0$ болғанда $\bar{a}$ векторымен бағыттас, ал $\alpha < 0$ болғанда $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталатын векторды айтамыз. α санымен $\bar{a}$ векторының көбейтіндісі $\alpha \cdot \bar{a}$ түрінде белгіленеді.

Мысал 4: Берілген $\bar{a}$ векторына сәйкес $4\bar{a}$ және $-3\bar{a}$ векторларын тұрғызыңыз (Сурет 9).



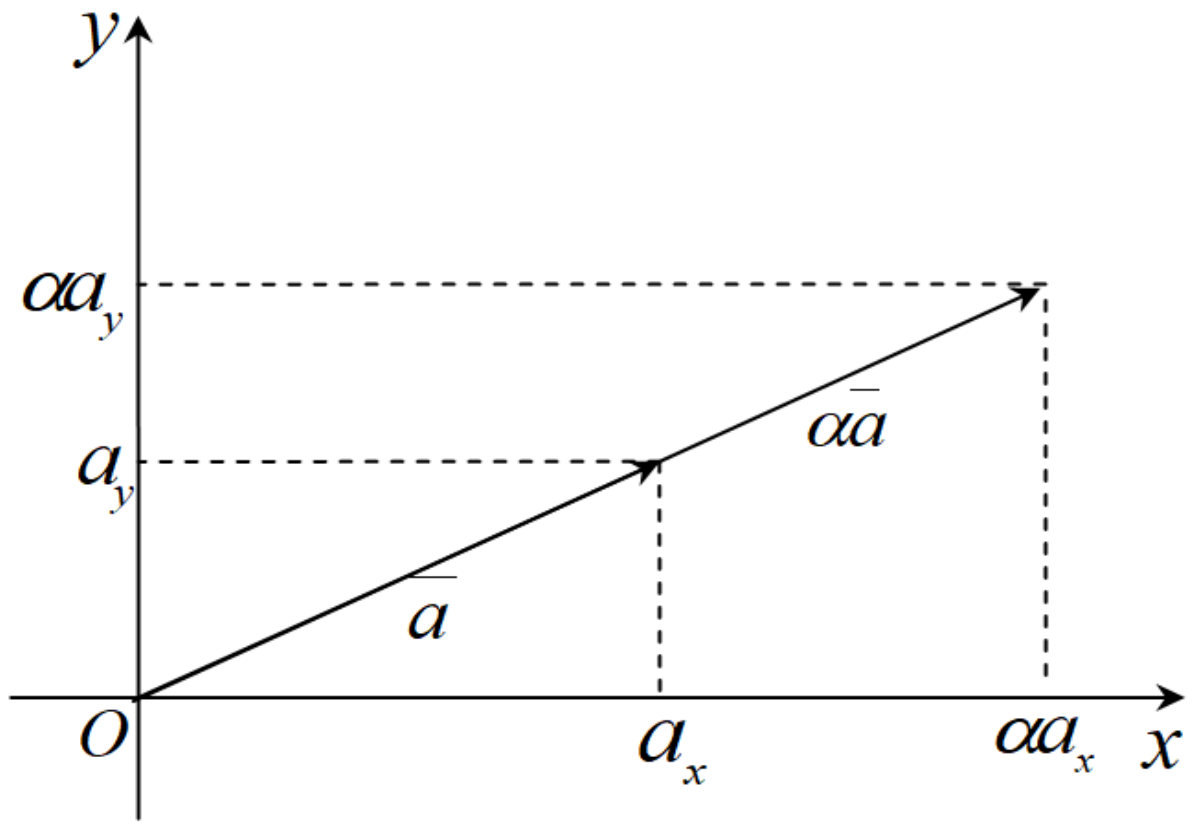
Сурет 9

Координаталық түрде:

a) $\bar{a}(a_x, a_y)$ үшін $\alpha\bar{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y)$;

b) $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ үшін $\alpha\bar{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

Бұл теңдіктер пропорционал кесінділер қасиетінен шығады (Сурет 10).



Сурет 10

Мысал 5: $\bar{a} = (3;-5;8)$ векторы берілген. $5\bar{a}, -1 \cdot \bar{a}$ векторларын табыңыз.

Шешімі:

$$5\bar{a} = (5 \cdot 3, 5 \cdot (-5), 5 \cdot 8) = (15, -25, 40);$$
$$-1 \cdot \bar{a} = (-1 \cdot 3, -1 \cdot (-5), -1 \cdot 8) = (-3, 5, -8).$$

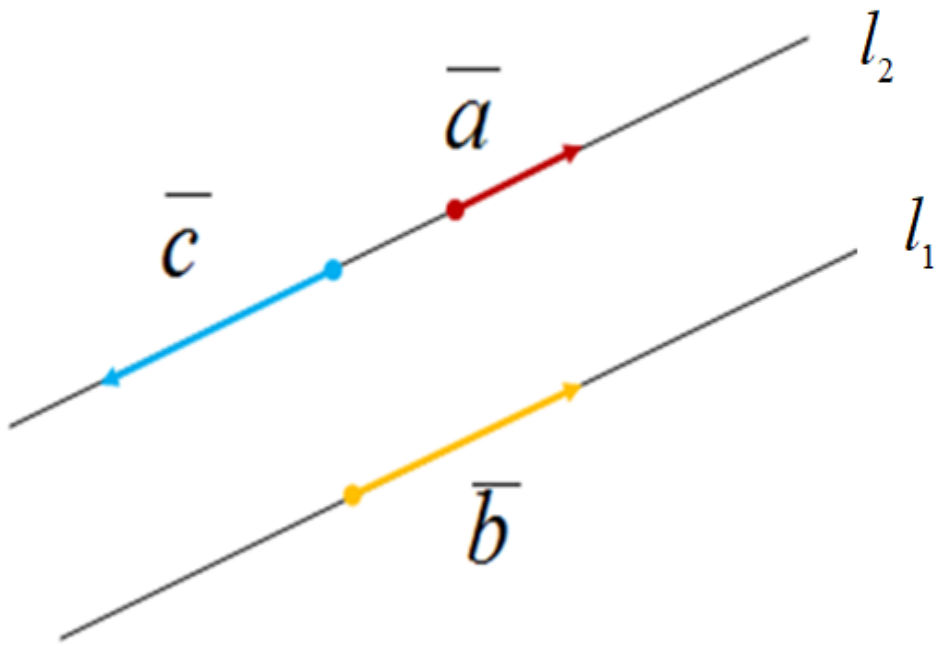
Соңғы мысалдан

$$-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$$

теңдігі орынды болатынын көреміз.

Анықтама 5. Бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жататын векторлар *коллинеар векторлар* деп аталады (Сурет 11).

Белгіленуі: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.



Сурет 11

Кез келген екі вектор коллинеар болады: $\bar{c} \parallel \bar{a} \parallel \bar{b}$.

Векторды нөлден өзгеше санға көбейту оның бағытын сақтайтын немесе қарама-қарсы бағытқа өзгеретін болғандықтан *коллинеарлықтың келесі белгісін* (қажетті және жеткілікті шартын) аламыз:

1. $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \bar{a} = \lambda \bar{b};$

2. $\bar{a}(a_x, a_y, a_z) \parallel \bar{b}(b_x, b_y, b_z) \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z).$

Мысал 6: $\bar{a}=(2,5,-3), \bar{b}=(4;5;-6), \bar{c}=(6;15;-9)$ векторлары берілген. $\bar{a},\bar{b}$ және $\bar{a},\bar{c}$ векторларының қайсысы коллинеар?

Шешімі:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{a_y}{b_y}=\frac{5}{5}=1 \quad \Rightarrow \frac{a_x}{b_x}\neq\frac{a_y}{b_y}\Rightarrow \bar{a}\not\parallel\bar{b};$$

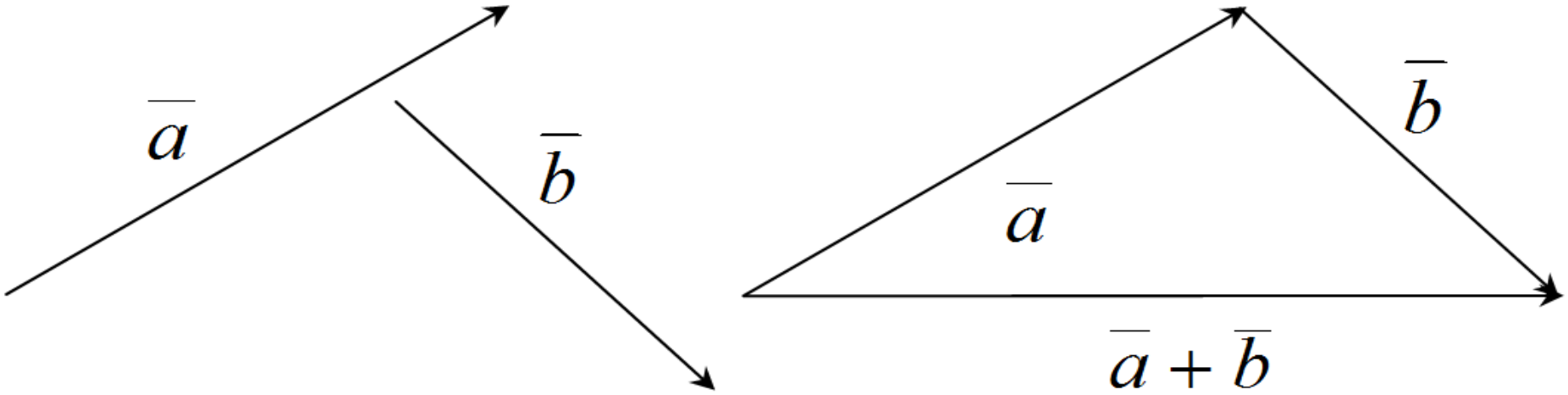
$$\frac{a_x}{c_x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad \frac{a_y}{c_y}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},\quad \frac{a_z}{c_z}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \frac{a_x}{c_x}=\frac{a_y}{c_y}=\frac{a_z}{c_z}\Rightarrow \bar{a}\parallel\bar{c}.$$

2) Векторлардың қосындысы мен айырмасы.

а) үшбұрыштар ережесі

$\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының қосындысы деп $\bar{b}$ векторының басын $\bar{a}$ векторының ұшына орналастырып алып, басын $\bar{a}$ векторының, ал ұшын $\bar{b}$ векторының ұшына орналастыра құрылған векторды айтамыз (Сурет 12).

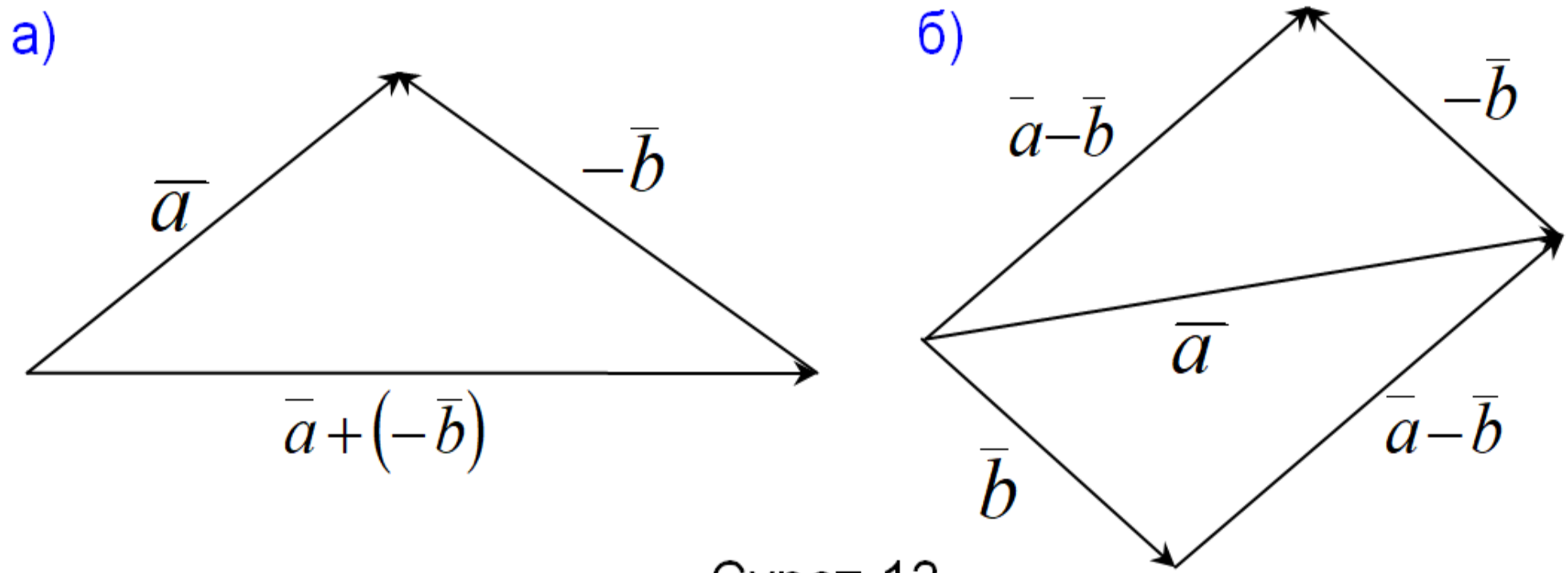
Қосындының белгіленуі: $\bar{a} + \bar{b}$.



Сурет 12

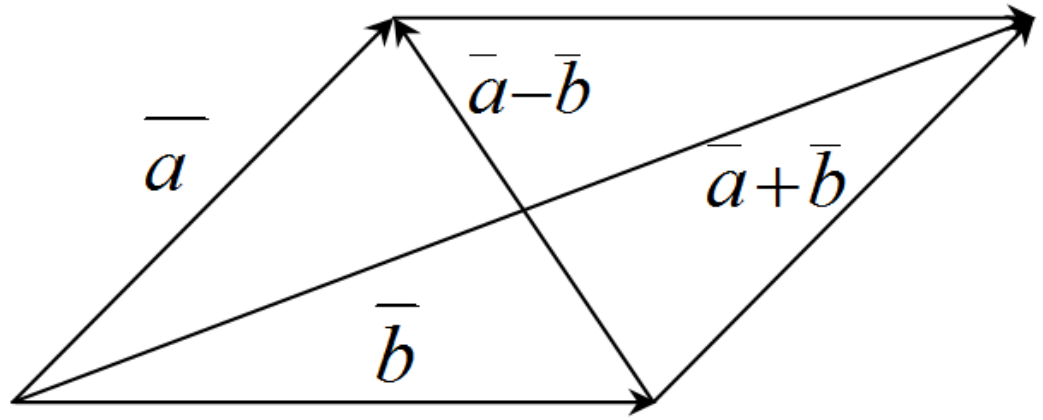
$\bar{a}$ *және* $\bar{b}$ *векторларының айырмасы* деп $\bar{a}$ векторы мен $(-\bar{b})$ векторының қосындысын айтамыз (Сурет 13 а, б).

Айырманың белгіленуі: $\bar{a}-\bar{b}$.



Сурет 13

б) *параллелограмм ережесі* (Сурет 14):



Сурет 14

Ескерту. $\bar{a}+\bar{O}=\bar{a}.$

Координаталық түрде берілген $\bar{a}=(a_x,a_y),\ \bar{b}=(b_x,b_y)$ үшін

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y) \qquad (2)$$

Мысал 7: $\bar{a} = (3;-5;8)$, $\bar{b} = (-1;1;-4)$ векторлары берілген. $|\bar{a} + \bar{b}|$, $|\bar{a} - \bar{b}|$ ұзындықтарын табыңыз.

Шешімі:

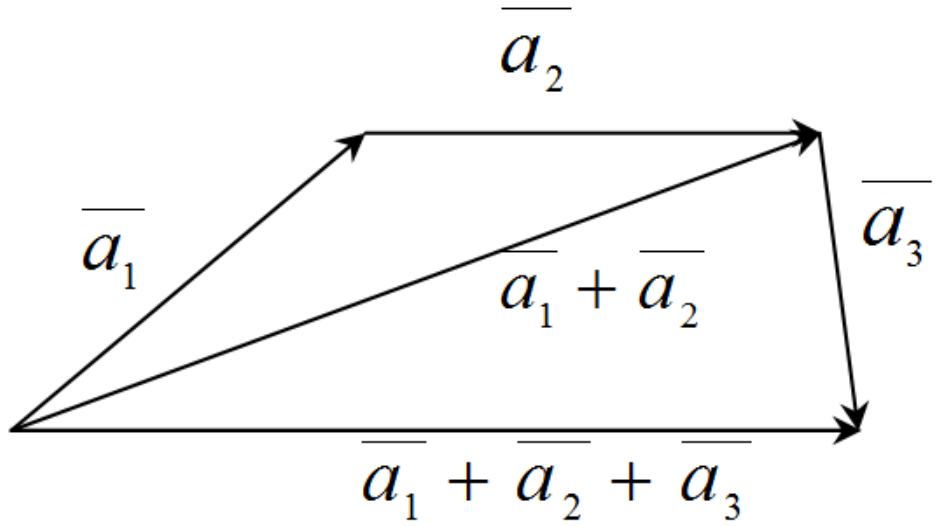
$$\bar{a} + \bar{b} = (3-1;-5+1;8-4) = (2;-4;4),$$

$$|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6;$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (3+1;-5-1;8+4) = (4;-6;12),$$

$$|\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = \sqrt{16+36+144} = \sqrt{196} = 14.$$

$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3}$ *векторларының қосындысы* деп $\left(\overline{a_1} + \overline{a_2}\right) + \overline{a_3}$ векторын айтамыз және $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3}$ түрінде белгілейміз (Сурет 15).

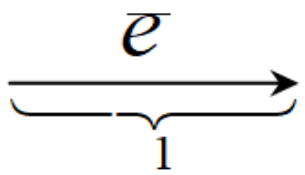


Сурет 15

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ *векторларының қосындысы* деп $\left(\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a}_{n-1}\right) + \overline{a_n}$ векторын айтамыз және $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}$ түрінде белгілейміз.

Анықтама 6. *Бірлік вектор* деп ұзындығы бірге тең векторды айтамыз (Сурет 16):

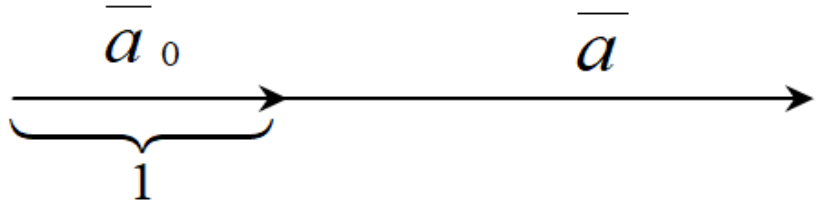
$|\bar{e}| = 1 \Leftrightarrow \bar{e}$ - бірлік вектор.



Сурет 16

Бағыты $\bar{a}$ векторының бағытымен бағыттас бірлік вектор $\bar{a}$ *векторының орты (бірлік векторы)* деп аталады (Сурет 17):

$|\bar{a}_0| = 1.$



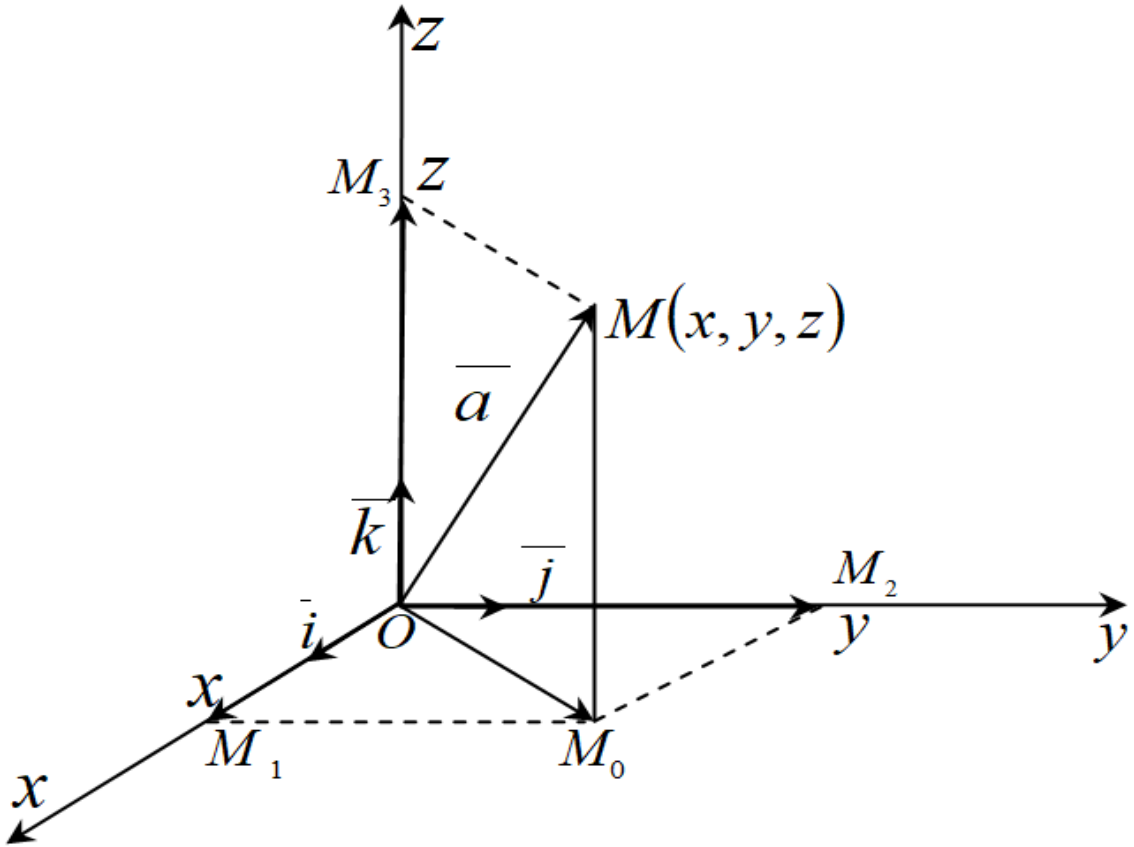
Сурет 17

Мысал 8: $\bar{i}=(1,0,0),\ \bar{j}=(0,1,0),\ \bar{k}=(0,0,1)$ сәйкес OX, OY, OZ өстерінің орттары.

$\bar{a}$ векторы өзінің a_0 бірлік векторлары арқылы

$|\bar{a}|=|\bar{a}|\cdot a_0$ түрінде жазылады.

Бұл теңдікті пайдаланып $\bar{a}(x, y, z)$ векторының $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ орттарына жіктелуін аламыз (Сурет 18):



Сурет 18

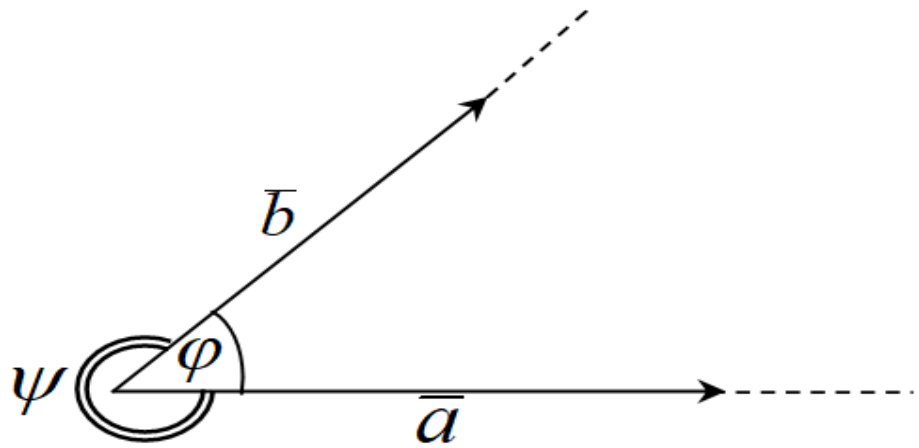
$$\bar{a}=\overline{OM}=\overline{OM_0}+\overline{OM_3}=\left(\overline{OM_1}+\overline{OM_2}\right)+\overline{OM_3}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

$$\overline{OM}(x,y,z)=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

Анықтама 7. $\bar{a}, \bar{b}$ *векторларының арасындағы бұрыш* деп бір нүктеден $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына бағыттас шыққан екі сәуле шектейтін бұрыштардың кішісін айтамыз (Сурет 19).

Белгіленуі: $\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$ - $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш

$$\varphi < \psi \Rightarrow \left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \varphi$$



Сурет 19

Анықтамадан $0 \le \left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) \le \pi$ болатыны шығады.

Егер $\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\bar{a}, \bar{b}$ векторлары *ортогональ* деп аталады. *Белгіленуі:* $\bar{a} \perp \bar{b}$.

$\bar{a}$ векторының координата өстерімен жасайтын бұрыштары

$$\alpha = \left(\bar{a}, \hat{OX}\right), \quad \beta = \left(\bar{a}, \hat{OY}\right), \quad \gamma = \left(\bar{a}, \hat{OZ}\right),$$

болса, онда

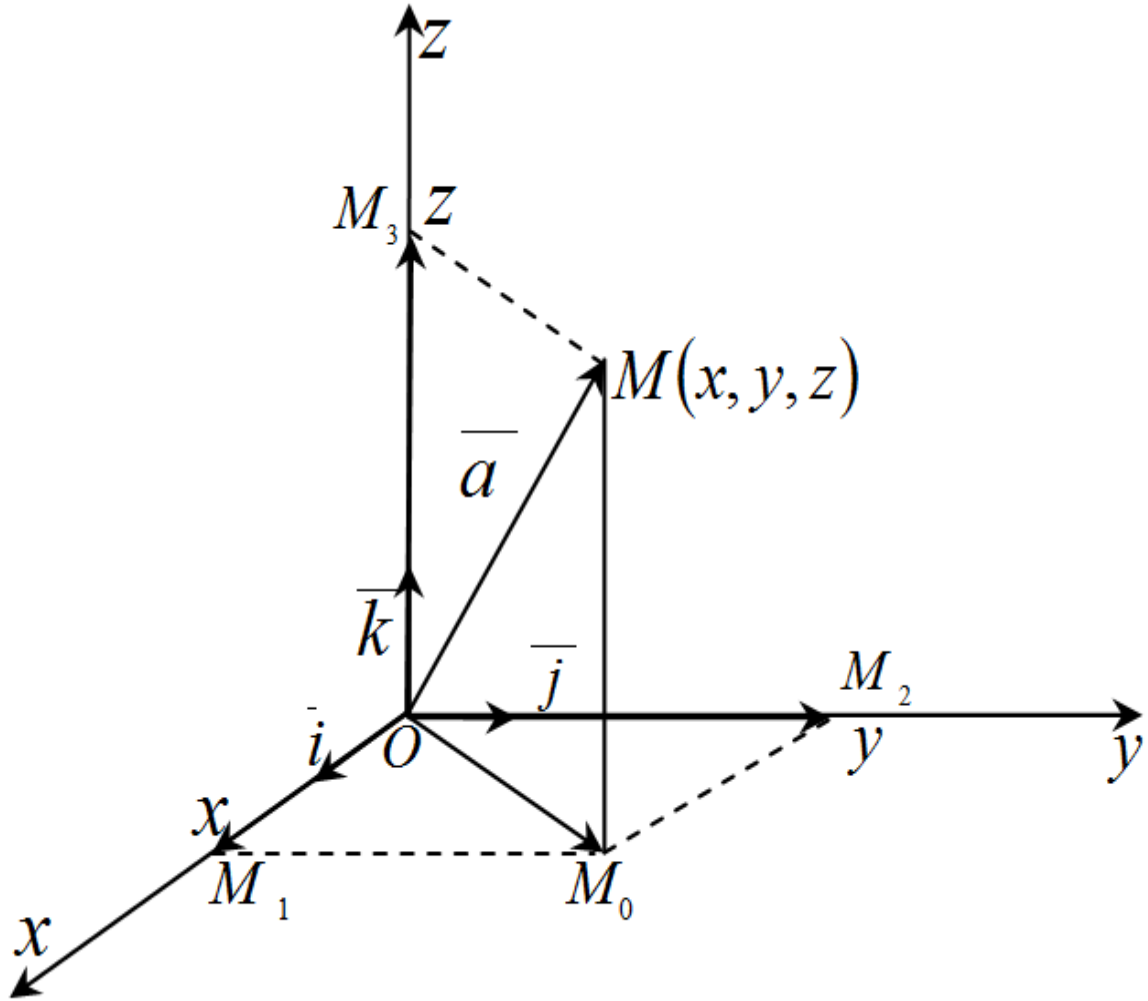
$$\cos\ \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \cos\ \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \cos\ \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

сандары $\bar{a}$ *векторының бағыттаушы косинустары* деп аталады.

Мысал 9: OX, OY, OZ өстерінің

$$\bar{i} = (1,0,0),\ \bar{j} = (0,1,0),\ \bar{k} = (0,0,1)$$

орттары (бірлік векторлары) өзара ортогональ болады: $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$.



Қайталау сұрақтары

1. Скалярлық шама және мысалдары.
2. Векторлық шамалар дегеніміз не?
3. Вектор (геометриялық вектор) ұғымы, белгіленулері.
4. Тең векторлар ұғымы.
5. Нөлдік вектор ұғымы, белгіленуі.
6. Қарама-қарсы векторлар, белгіленуі.
7. Вектордың ұзындығы (модулі).
8. Векторды санға көбейту, қасиеттері.
9. Коллинеар векторлар ұғымы.
10. Векторлардың қосындысы мен айырмасы (үшбұрыштар, параллелограмм ережесі).



11. $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторларының қосындысын табу.
12. Бірлік вектор ұғымы, белгіленуі.
13. $\overline{a}$ векторының орты (бірлік векторы).
14. $\overline{a}(x, y, z)$ векторының $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ орттарына жіктелуі.
15. $\overline{a}, \overline{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табу.
16. $\overline{a}, \overline{b}$ векторларының ортогональдығы.
17. $\overline{a}$ векторының бағыттаушы косинустары.



Векторлардың скалярлық көбейтіндісі және оның қасиеттері

Анықтама 8. $\overline{a}$ *және* $\overline{b}$ нөлдік емес *векторларының скалярлық көбейтіндісі* деп

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |a||b| \cos\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \qquad (3)$$

санын айтамыз, *белгіленуі:* $\overline{a} \cdot \overline{b}$ немесе $(\overline{a}, \overline{b})$.

Ескерту. Векторлардың біреуі нөлдік вектор болса скаляр көбейтінді нөлге тең деп аламыз:

$$\overline{O} \cdot \overline{b} = 0 .$$

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a};$
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c};$
3. $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b})$, мұндағы λ кез келген сан;
4. $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0;$

Салдар: $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0.$

5. $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2;$

Салдар: $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1.$

$\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ және $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ координаталық векторлары үшін:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \cdot (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$

b) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

$\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ координаталық түрдегі векторы үшін

$$\bar{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Мысал 10: $\bar{a} = 3\bar{i} + \overline{4j} + 7\bar{k}$ және $\bar{b} = 2\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$ векторлары берілген. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$\bar{a} = (3;4;7),\ \bar{b} = (2;-5;2)$$

болғандықтан

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}.$$

Мысал 11: $\bar{a} = (4;-2;-4)$ және $\bar{b} = (6;-3;2)$ векторлары берілген. $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$ неге тең?

Шешімі:

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = 2(4;-2;-4) - 3(6;-3;2) = (8;-4;-8) - (18;-9;6) = (-10;5;-14),$$

$$\bar{a} + 2\bar{b} = (4;-2;-4) + 2(6;-3;2) = (4;-2;-4) + (12;-6;4) = (16;-8;0),$$

$$(2\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b}) = (-10;5;-14) \cdot (16;-8;0) = -160 - 40 - 0 = -200.$$

Векторлардың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасынан

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|a||b|\cos\left(\hat{\bar{a}},\bar{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\hat{\bar{a}},\bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \qquad (4)$$

теңдігі шығады.

$\bar{a}=(a_x,a_y,a_z),\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$ координаттық векторлары үшін

$$\cos\left(\hat{\bar{a}},\bar{b}\right)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (5)$$

теңдігін аламыз.

Мысал 12: $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$ және $\bar{b}=6\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$ векторларының арасындағы φ бұрышын табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$\bar{a}=(1;2;3),\ \bar{b}=(6;4;-2)$$

болғандықтан

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{1\cdot6+2\cdot4+3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{6+8-6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14\cdot4}}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7};$$

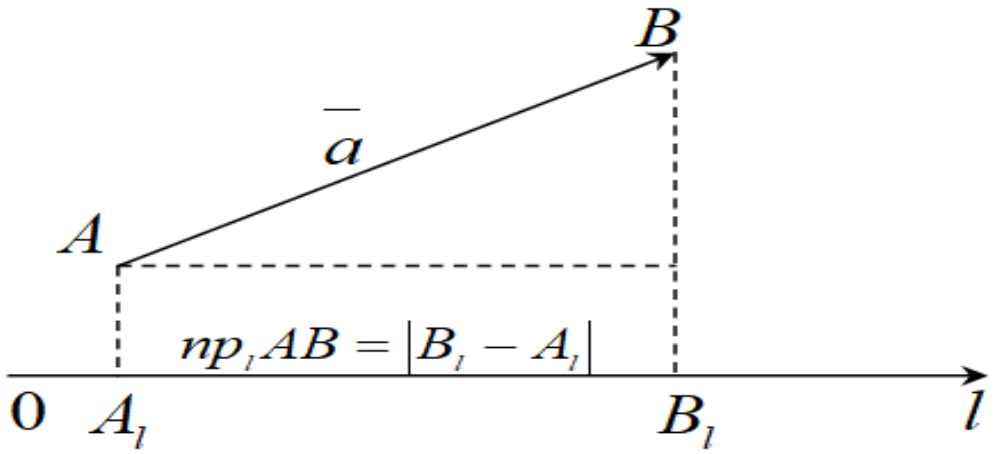
$$\varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Анықтама 9. *$\bar{a}$ векторының l бағытталған өсіне проекциясы* $|\bar{a}|\cos\left(\hat{l,\bar{a}}\right)$ санын айтады да

$$np_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\left(\hat{l,\bar{a}}\right)$$

түрінде белгіленеді:

Анықтамадан бұл проекцияның $\left(\hat{l,\bar{a}}\right)$ бұрышы сүйір болса A_1B_1 кесіндісінің ұзындығына, доғал болса A_1B_1 кесіндісінің теріс таңбамен алынған ұзындығына тең болатыны шығады (сурет 20).



Сурет 20

Вектордың өске проекциясының негізгі қасиеттері:

a) Өске перпендикуляр вектордың осы өске проекциясы нөлге тең:

$$np_l\bar{a} = 0, \quad \bar{a} \perp l.$$

b) Вектордың өске проекциясы вектордың модулі мен вектор мен өстің арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең:

$$np_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi.$$

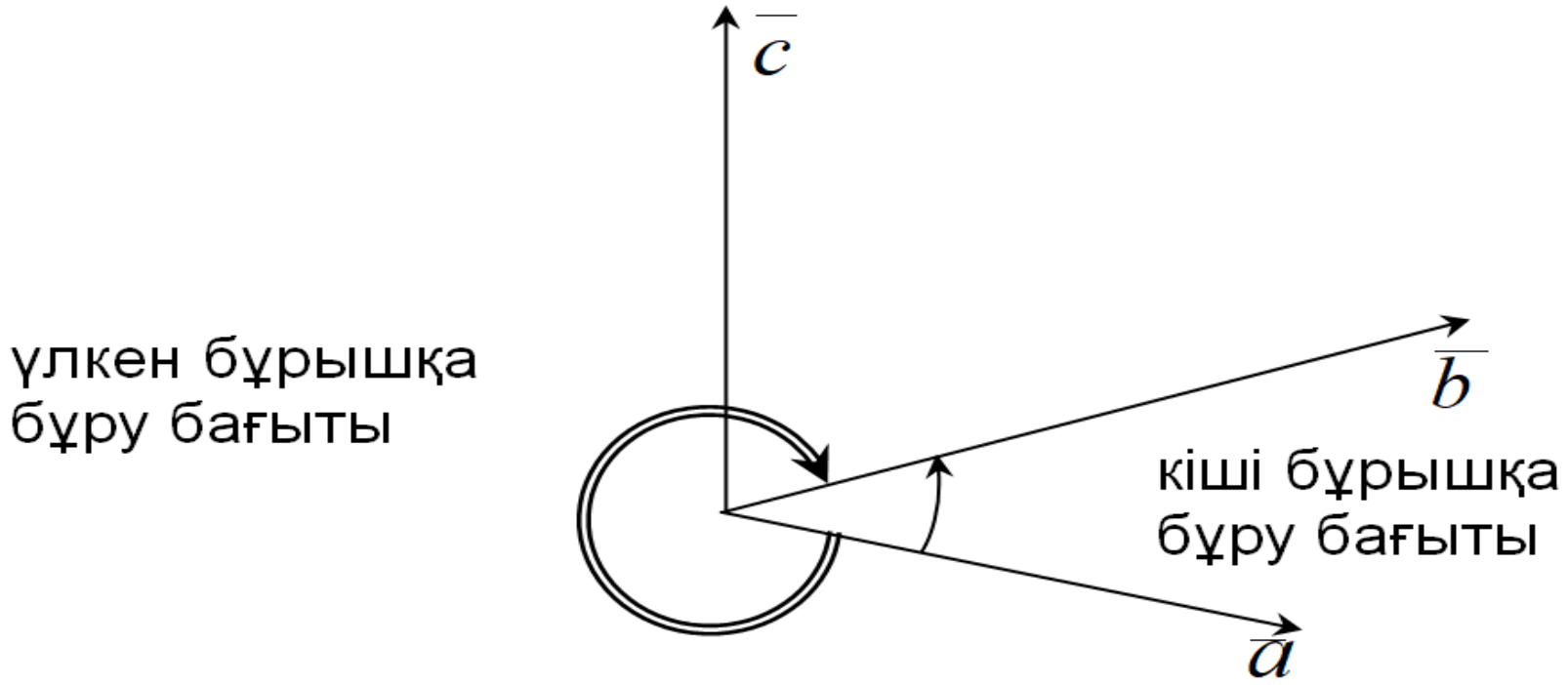
Қайталау сұрақтары

1. Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері.
2. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табу формулалары.
3. Вектордың өске түсірілген проекциясы, қасиеттері.



Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері

Егер $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының бастарын бір нүктеге келтіріп алып $\bar{c}$ векторының ұшына орналасқан бақылаушыға $\bar{a}$ векторын $\bar{b}$ векторымен беттестіру үшін кіші бұрышқа бұру сағат тілінің айналу бағытына қарсы бағытта жасалса, онда реттелініп алынған үш $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *векторлары оң үштік* құрайды дейміз (Сурет 21).



Сурет 21

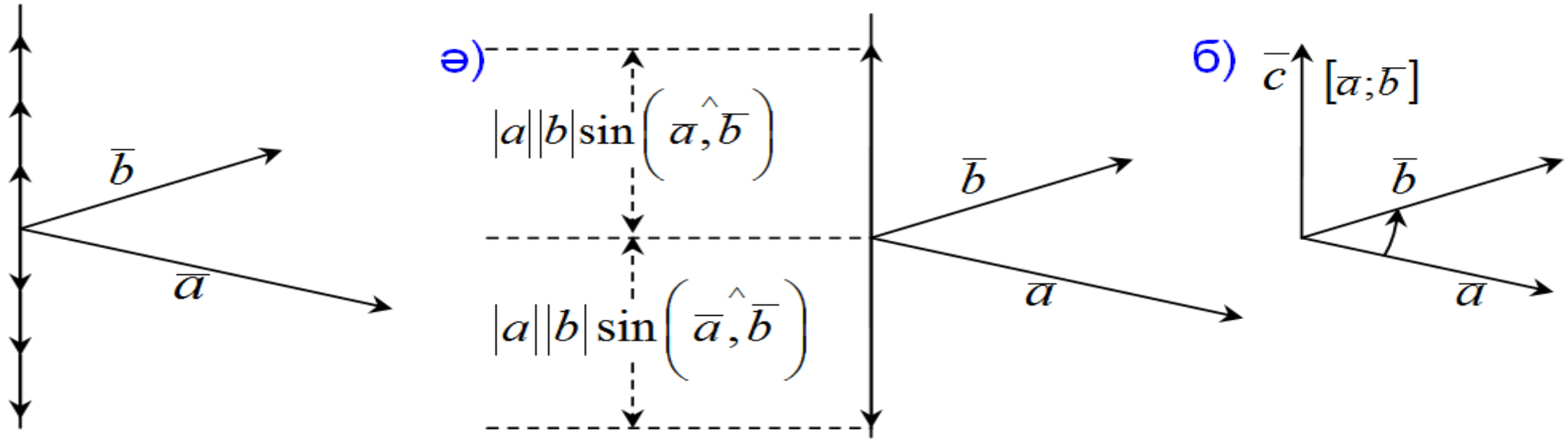
Анықтама 10. $\bar{a}$ *векторы мен* $\bar{b}$ *векторының векторлық көбейтіндісі* деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\bar{c}$ векторын айтамыз (Сурет 22 а, ә, б):

1) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $$|\bar{c}| = |a||b|\sin\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right);$$ (6)

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтіндінің белгіленуі: $\bar{a} \times \bar{b}$ немесе $[\bar{a};\bar{b}]$.



Сурет 22

Ескерту. Векторлық көбейтіндінің анықтамасынан

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}\,,\ \bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}\,,\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$$

теңдіктері шығады.

Ескерту. Екі вектордың бірі нөлдік вектор болса, онда олардың векторлық көбейтіндісі нөлдік вектор болады деп есептейміз:

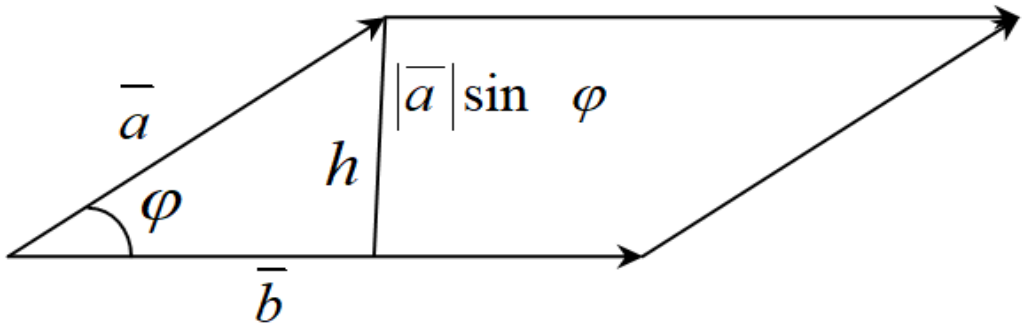
$$\bar{O} \times \bar{a} = \bar{O}.$$

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\bar{a} \,||\, \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ - $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының коллинеарлық белгісі;

   Салдар: $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$

2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$;
4. $m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b})$;
5. $\bar{a} \times \bar{b}$ векторлық көбейтіндісінің модулі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданын береді (Сурет 23).



Сурет 23

$$\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \left(\hat{\bar{a}, \bar{b}} \right),$$

$$S = |\bar{b}| \cdot h = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \sin \varphi = |\bar{a} \times \bar{b}|. \qquad (7)$$

Векторлық көбейтіндінің координаталық түрі.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\times\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)$$

және

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0,$$

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\ \bar{i}\times\bar{k}=\bar{j},\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$$

теңдіктері мен векторлық көбейтіндінің 2, 3 қасиеттерінен $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$ координаттық векторлары үшін

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (8)$$

теңдігі орынды болатыны шығады.

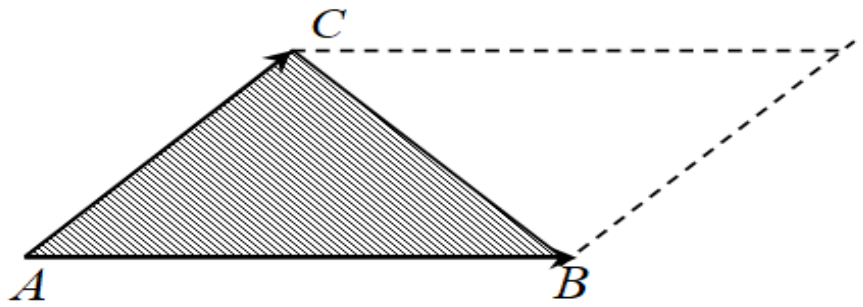
Бұл теңдік пен векторлық көбейтіндінің 5 қасиетінен $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған *параллелограмның ауданын табудың*

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right|. \qquad (9)$$

формуласы шығады.

Мысал 13: $A(1;\ 1;1),\ B(2;\ 3;4),\ C(4;3;2)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышының ауданын есептеңіз.

Шешімі: ABC үшбұрышының ауданы $\overline{AB},\overline{AC}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданынның жартысына тең (Сурет 24):



Сурет 24

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|. \qquad (10)$$

$$\overline{AB} = (2-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (4-1)\bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k},$$

$$\overline{AC} = (4-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k},$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = -4\bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \frac{\sqrt{96}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 24}}{2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Қайталау сұрақтары

1. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының оң үштігі.
2. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін есептеу формулалары
3. Векторлық көбейтіндінің қасиеттері.
4. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданы.



Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері

Анықтама 11. $\bar{a}, \bar{b}$ *және* $\bar{c}$ *векторларының аралас көбейтіндісі* деп $\bar{a} \times \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін айтамыз да

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

түрінде белгілейміз.

Анықтамадан $\bar{a}(a_x, a_y, a_z), \bar{b}(b_x, b_y, b_z), \bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ координаттық векторларының аралас көбейтіндісі

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (11)$$

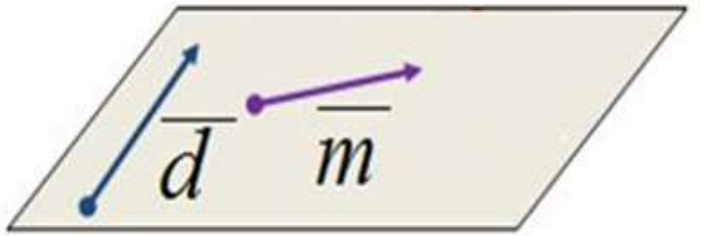
формуласы бойынша табылатыны шығады.

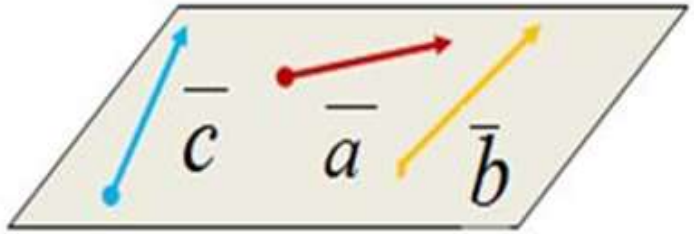
Мысал 14: $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k},\ \bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ және $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$ векторларының аралас көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=24+1-1+3+4+2=33.$$

Анықтама 12. Егер үш вектор бір жазықтықта не параллель жазықтықтарда орналасқан болса, онда олар *компланар векторлар* деп аталады (Сурет 25).





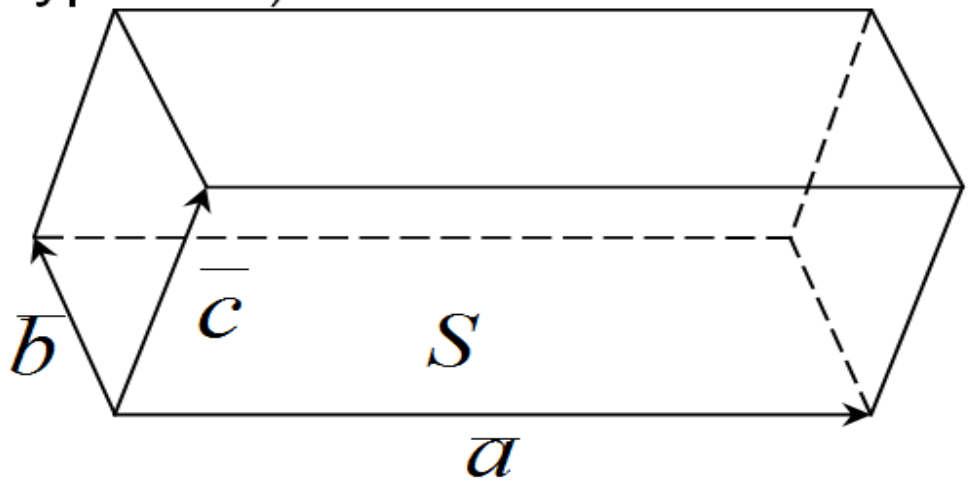
Сурет 25

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{m}$ - векторларының кез келген үшеуі компланар болады.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b}) = (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = (\overline{b},\overline{c},\overline{a}) = -(\overline{b},\overline{a},\overline{c})$;
2. $(\lambda\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \lambda(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, мұндағы λ тұрақты сан;
3. $(\overline{a_1} + \overline{a_2},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a_1},\overline{b},\overline{c}) + (\overline{a_2},\overline{b},\overline{c})$;
4. $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланар $\Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$;

5. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторларға тұрғызылған *параллелепипедтің көлемін* береді (Сурет 26).



Сурет 26

$$\left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right| = \left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\left((\bar{a}\times\bar{b}),\hat{\bar{c}}\right) = S\cdot h$$

$$V_{параллелепипед} = \left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right| \qquad (12)$$

Пирамида көлемі:

$$V_{пирамида} = \frac{V_{параллелепипед}}{6} = \frac{\left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right|}{6} \qquad (13)$$

Векторлардың қолданбалары

Векторлар ғылым мен техниканың көптеген салаларында маңызды рөл атқарып, есептердің алуан түрлерін шығаруда үлкен қолданысқа ие болып отыр.

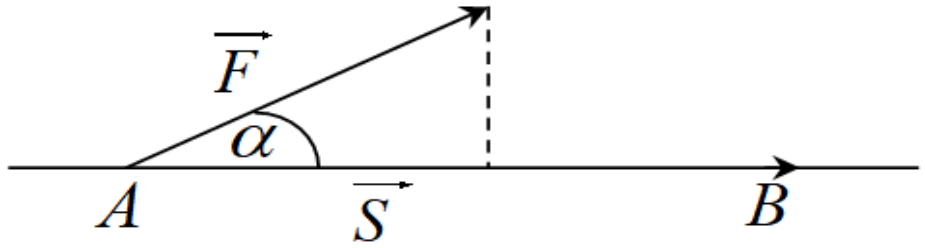
Векторлар теориялық физикада, математикалық физикада, теориялық механикада, аэродинамикада, гидродинамикада, өрістер теориясында, электротехникада тағы басқа ғылыми салаларында қолданылады.

Олардың негізгілері:

1. векторлар табиғат құбылыстарын зерттеуге қолданылады. Физиканың бірталай заңдары «вектор» тілінде өрнектеледі. Векторларды қолдану математиканы физикамен байланыстыруға, математиканы физикалық мазмұнды есептермен байытуға мүмкіндік берді;
2. векторлық аппаратты геометриялық есептерге қолданғанда қазіргі заманға сай әдістеме, оның идеяларын зерттеу әдістері туралы түсінік беруге мүмкіндік туады;
3. компьютерлік техникада, сызықтық бағдарламалау есептерінде, халық экономикасына байланысты есептерді шешуге қолданылады;
4. векторлық әдісті пайдалану физика, информатика, астрономия және есептеуіш техника сияқты математикамен сабақтас бағыттарды жеңіл меңгеруге игі әсер етеді;
5. астрономия және басқа да карталарды кескіндеуге үлесі көп;
6. үнемі болмаса да векторлық әдіспен теңдеулердің, теңдеулер жүйесінің, теңсіздіктің кейбір түрлерін векторлық әдіспен шешуге болады.

Тұрақты күш жұмысы

Материалдық нүкте $\overrightarrow{AB}=\vec{S}$ ығысуымен φ бұрышын жасайтын $\vec{F}$ тұрақты күшінің әсерімен A нүктесінен B нүктесіне түзу сызықты қозғалсын (Сурет 27).



Сурет 27

Физикадан $\vec{S}$ ығысуындағы $\vec{F}$ күшінің жұмысы

$$A = F \cdot S \cdot \cos\varphi \text{, яғни } A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Демек, оның қолдану нүктелерінің түзу сызықты ығысуындағы тұрақты күштің жұмысы ығысу векторын күш векторына скалярлық көбейткенге тең болады.

Мысал 15: Материалдық нүкте $A=(2;4;6)$ нүктесінен $B=(4;2;7)$ нүктесіне түзу сызықты қозғалдағы $\overrightarrow{F}$ күшінің жұмысын есептеңіз.

Шешімі: $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(2;-2;1)$.

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=3\cdot 2+2\cdot(-2)+4\cdot 1=6$$ (жұмыс бірлігі).

$\vec{F}$ және $\vec{S}$ арасындағы бұрыш $\cos\varphi=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|}$, яғни

$$\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{29}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{29}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Нүктеге қатысты күш сәтін анықтау

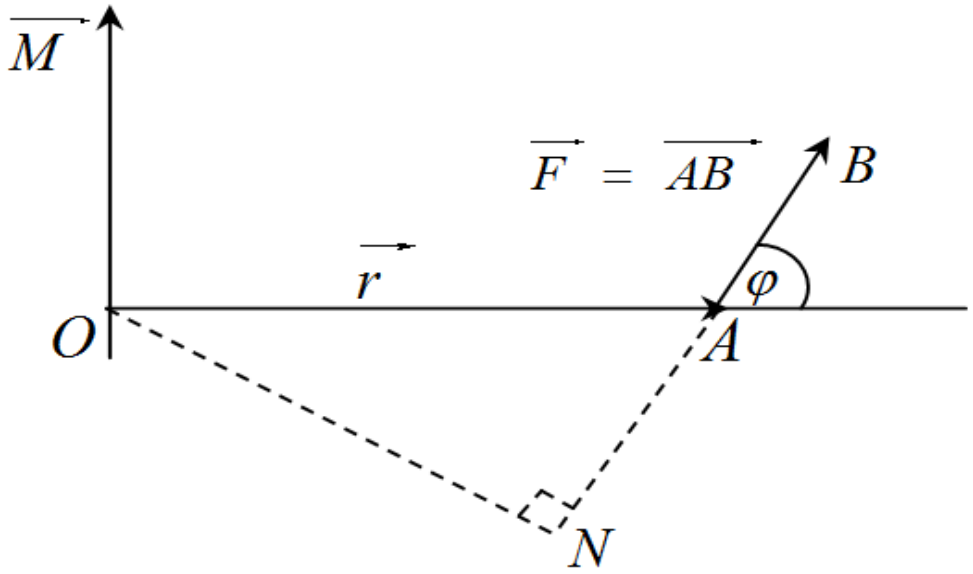
Мысал 16:

A нүктесіне $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ күші түсірілсін және O кеңістіктегі кез келген нүкте болсын (Сурет 28).

Шешімі: O нүктесіне қатысты $\vec{F}$ күшінің моменті (сәті) O нүктесі арқылы өтетін $\vec{M}$ векторы және:

1) O, A, B нүктелері арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр;
2) күштің иыққа көбейтіндісінің сандық мәніне тең

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot ON = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \sin\left(\vec{F}, \hat{\overrightarrow{OA}}\right);$$



Сурет 28

3) $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторларымен оң үштік құрайды.

Демек, $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$.

Вектордың физикада қолданылуы

Вектор физикада вектордың көмегімен әртүрлі бағытталған шамалар, мысалы: күш, үдеу, жылдамдық, т.б. шамаларды өрнектеуге болады.

Геометрияда вектор әдісімен теоремаларды дәлелдеу

Вектор геометрияда көптеп қолданылады. Вектор ұғымының геометрияда қолданылуы кейбір күрделі геометриялық ұғымдарды ықшамды айтуға, геометриялық есептерді шығарудың ерекше бір әдісін табуға мүмкіндік берді. Векторлық әдістің геометрияда қолданылуын екі топқа бөлуге болады:

1) векторлық амалдарды оқып-үйрену барысында геометриялық фигуралардың және оның қасиеттерін колдана отырып шығарылатын есептер.
2) геометрияда вектор әдісімен теоремаларды дәлелдеу.

Вектордың экономикалық есептерді шешуде қолданылуы

Мысал 17: Кәсіпорын төрт түрлі өнім шығарсын. Негізгі өндірістік-экономикалық көрсеткіштері келесі кестеде берілген.

Өнімнің түрі	Шығару жоспары	Шикізат шығыны кг/өнім	Уақыт нормасы сағ/өнім	Өнімнің бағасы /ақша бір.
1	30	6	9	45
2	40	3	4	20
3	20	8	12	60
4	50	2	3	15

Күнделікті мына көрсеткіштерді анықтау керек: S - шикізат шығынын, T - жұмыс уақытының шығынын және P - өндірілген өнімнің жалпы құнын.

Шешімі: Берілген кестені пайдаланып өндірістік циклды анықтайтын төрт вектор енгізейік:

$q = (30,40,20,50)$ - өнімді өндірудің вектор-жоспары;

$s = (6,3,8,2)$ - шикізат шығынының векторы;

$t = (9,4,12,3)$ - жұмыс уақыты шығынының векторы;

$p = (45,20,60,15)$ - баға векторы.

Сонда ізделінді экономикалық көрсеткіштер q -вектор-жоспардың қалған үш вектормен скалярлық көбейтіндісі арқылы анықталады:

$S = s \cdot q = 180 + 120 + 160 + 100 = 560$ кг;

$T = t \cdot q = 270 + 160 + 240 + 150 = 820$ сағ.;

$P = p \cdot q = 1350 + 800 + 1200 + 750 = 4100$ ақша бірл.

Қайталау сұрақтары

1. $\bar{a}, \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі.
2. Аралас көбейтіндінің қасиеттері.
3. Компланар векторлар ұғымы.
4. Параллелепипедтің көлемін есептеу.
5. Пирамиданың көлемін есептеу.
6. Векторлардың қолданыстарын атаңыз, мысалдар.



Әдебиеттер тізімі

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

