Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 2

СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Матрицаның рангісі;
2. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерінің негізгі анықтамалары;
3. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері;
4. n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі;
5. Сызықтық теңдеулер жүйесінің қолданылуы.

Матрицаның рангісі

Матрицаның қандай да бір жолдары мен бағандарын сызу (алып тастау) арқылы құрылған анықтауыш осы *матрицаның ішкі анықтауышы* деп аталады.

Ескерту. Квадраттық матрицаның өз анықтауышы да оның ішкі анықтауышы болып саналады.

Анықтама 1. *Матрицаның рангісі* деп осы матрицаның нөлден айрықша ішкі анықтауыштарының реттерінің ең үлкенін айтамыз. Матрицаның рангісі

$$r,\quad r(A),\quad r_A,\quad rangA$$

түрлерінде белгіленеді.

Теорема 1. *Матрицаның рангісі өзгермейді*, егер:

1) матрицаны транспонирлесек;
2) барлық элементтері нөлге тең жолды немесе бағанды сызсақ (алып тастасақ);
3) матрицаның екі жолының немесе екі бағанының орындарын ауыстырсақ;
4) матрица жолының немесе бағанының әрбір элементін нөлден өзгеше санға көбейтсек;
5) бір жолдың (бағанның) элементтерін бір санға көбейтіп алып басқа жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қоссақ.

1) - 5) түрлендірулері матрицаға қолданылатын *қарапайым түрлендіру-лер* деп аталынады.

Егер A және B матрицаларының бірін екіншісінен оған қарапайым түрлендірулер қолдану арқылы алуға болса, онда A, B матрицалары *эквивалентті матрицалар* деп аталады. A, B матрицаларының эквиваленттілігі $A \sim \mathrm{B}$ түрінде белгіленеді.

Анықтауыштардың қасиеттері мен рангтің анықтамасынан эквивалентті матрицалардың рангтерінің тең болатыны шығады:

$$A \sim \mathrm{B} \Rightarrow r(A) = r(B).$$

Матрицаның рангін анықтау кезінде қарапайым түрлендірулерді қолдану арқылы рангісін есептеу қолайлырақ эквивалентті матрицаға көшу рангтің осы қасиетімен негізделген.

Мысал 1: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі:

A матрицасының 2-ші жолы мен 2, 3, 4-ші бағандарының барлық элементтері нөлге тең болғандықтан 1-теореманың 2-ші қарапайым түрлендіруі бойынша

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}.$$

Олай болса, эквивалентті матрицалардың рангтері тең болатындықтан $r(A)=r\left(\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow r\left(\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}\right)=2.$$

Сонымен, $r(A)=r\left(\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}\right)=2.$

Мысал 2: $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі: 1-теореманың 5), 4), 5), 2) қарапайым түрлендірулерін біртіндеп қолдана отырып

$$B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

эквиваленттіліктерін аламыз. Олай болса жоғарыдағы мысалдағыдай:

$$r(B)=r\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right),\quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0\Rightarrow r\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right)=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r(B)=r\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right)=2.$$

Мысал 3: $C=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі: 1-теореманың 5), 2) қарапайым түрлендірулерін біртіндеп қолдана отырып

$$C=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

эквиваленттіліктерін аламыз. Онда алдыңғы мысалдағыдай:

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 2\cdot 3=24\neq 0\Rightarrow \mathrm{r(\,C)}=3.$$

Мысал 4: $D=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&4&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&2\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&2\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow \mathrm{r}(\mathrm{D})=2\,.$$

Қайталау сұрақтары

1. Матрицаның ішкі анықтауышы ұғымы, мысал.
2. Матрицаның рангісі ұғымы, мысал.
3. Матрицаның рангісінің өзгермейтін жағдайларын атаңыз.
4. Эквивалентті матрицалар, мысал.



Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерінің негізгі анықтамалары

Анықтама 2. n *белгісізді сызықтық теңдеу* деп белгісіздерге қатысты бірінші дәрежелі, яғни

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

түріндегі теңдеуді айтамыз, мұндағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тұрақтылары – теңдеудің коэффициенттері, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – теңдеудің белгісіздері, b тұрақтысы – теңдеудің бос мүшесі.

Анықтама 3. *n белгісізді m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі* деп

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

түріндегі жүйені айтамыз, мұндағы a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ - жүйенің белгілі коэффициенттері, ал b_i, $i=\overline{1,m}$ - белгілі бос мүшелер, x_j, $j=\overline{1,n}$ - белгісіздер.

Анықтама 4. Егер $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сандарын сәйкес $x_1, x_2, \ldots, x_n$ белгісіздерінің орнына қойғанда жүйенің әрбір теңдеуі дұрыс сандық теңдікке айналса, онда $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ реттелген сандар тобы (1) *жүйесінің шешімі* деп аталады. Жүйенің шешімін $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ түрінде де жазуға болады.

Анықтама 5. Жүйенің тым болмағанда бір шешімі бар болса, онда *жүйе үйлесімді* деп, ал кері жағдайда *жүйе үйлесімсіз* деп аталады.

Анықтама 6. Үйлесімді (1) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар болса, онда *жүйе анықталған*, кері жағдайда, яғни шешімдер саны бірден артық болса, *жүйе анықталмаған* деп аталады.

Анықтама 7. Шешімдерінің жиындары бірдей жүйелер *эквивалентті жүйелер* деп аталады.

Анықтама 8. Егер (1) жүйесінің барлық бос мүшелері нөлге тең болса $(b_i = 0, \quad i = \overline{1,m})$, онда ол *біртектес/ біртекті теңдеулер жүйесі* деп аталады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесі әруақытта үйлесімді, себебі оның $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ тривиалды шешімі бар.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

жүйесінің коэффициенттерінен олардың орналасу ретін сақтап құрылған матрицаны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- *жүйесінің матрицасы,* ал

коэффициенттері мен бос мүшелерінен тұратын матрицаны

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- *жүйесінің кеңейтілген матрицасы* деп атаймыз.

Жүйенің үйлесімділігі оның матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангілерімен тікелей байланысты.

Теорема 2 (Кронекер-Капелли теоремасы). *(1) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін* $r(A) = r(\overline{A})$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті:

(1) жүйесі үйлесімді $\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A})$.

Анықтама 9. *Жүйенің рангісі* деп оның матрицасының рангісін айтамыз. $r(A)$ - (1) жүйесінің рангісі.

Теорема 3. *Үйлесімді жүйенің шешімінің жалғыз болуы үшін* оның рангісінің белгісіздер санына тең болуы қажетті және жеткілікті:

$$r(A) = r(\overline{A}) = n \Leftrightarrow$$ (1) жүйесінің жалғыз шешімі бар.

Теорема 4. *Үйлесімді жүйенің шешімдерінің жиыны шексіз жиын болуы үшін* оның рангісінің белгісіздер санынан кем болуы қажетті және жеткілікті:

$$r(A) = r(\overline{A}) < n \Leftrightarrow$$ (1) жүйесінің шешімдер жиыны шексіз жиын.

Мысал 5: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін үйлесімділікке зерттеңіз.

Шешімі: Жүйенің белгісіздер саны $n = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$ - берілген жүйенің матрицасы;

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)$$ - берілген жүйенің кеңейтілген матрицасы.

A және $\overline{A}$ матрицаларының рангілерін анықтайық:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$$

$|A|$ анықтауышы кеңейтілген матрицаның 3-ші ретті ішкі анықтауышы және $|A| \neq 0$, олай болса $r(\overline{A}) \geq 3$. Сонымен қатар $r(\overline{A}) > 3$ болуы мүмкін емес, себебі $\overline{A}$ кеңейтілген матрицасы барлығы үш жолдан ғана тұратындықтан оның ішкі анықтауыштарының реті 3-тен артпайды. Олай болса $r(\overline{A}) = 3$.

Сонымен $n = 3, r(A) = 3$ және $r(\overline{A}) = 3$, яғни

$r(A) = r(\overline{A}) = n \Rightarrow$ |теорема 3 бойынша| $\Rightarrow$ жүйе үйлесімді және анықталған (жалғыз шешімі бар).

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері

Теңдеулер жүйесін шешу жолы белгісіздер санының теңдеулер санына тең, теңдеулер санынан артық, теңдеулер санынан кем жағдайларына байланысты болады. Осы жағдайлардың әрқайсысына жеке – жеке тоқталамыз.

а) $n = m$ **белгісіздер саны мен теңдеулер саны тең жағдай**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

n белгісізді n сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Матрицалық әдіс

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

жүйесі жүйенің $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасы, белгісіздердің $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$

матрицасы және бос мүшелердің $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ матрицасы арқылы

$$AX = B \qquad (4)$$

матрицалық түрде жазылады.

Мақсатымыз белгісіз X матрицасын табу. $\det A \neq 0$ жағдайында A^{-1} кері матрицасы бар болады. (4) теңдеуінің екі жағын да A^{-1} кері матрицасына сол жақтан көбейтсек

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

теңдігін аламыз. Бұдан, $A^{-1}A = E$ және $EX = X$ екенін ескерсек, (4) теңдеуінің шешімі

$$X = A^{-1}B \qquad (5)$$

екендігі шығады.

(5) теңдігін

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (6)$$

түрінде жазып алып, оның оң жағындағы көбейтіндіні есептесек

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз. Бұдан

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$$

шешімі екендігі шығады.

Ескерту.

Матрицалық әдіс жүйенің матрицасы қайтымды, яғни $\det A \neq 0$ жағдайында ғана қолданылады.

Ал $\det A = 0$ жағдайында A матрицасы қайтымсыз, яғни A^{-1} кері матрицасы жоқ болатындықтан, матрицалық әдіс қолданылмайды.

Мысал 6: Жоғарғыдағы 5-мысалдағы $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-7 \end{cases}$ жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешімі: Жүйені

$$AX = B$$

матрицалық түрінде жазып аламыз, мұндағы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ - жүйенің матрицасы;

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ - бос мүшелер матрицасы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - белгісіздер матрицасы.

X матрицасын табу керек. Жүйе матрицасының анықтауышы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

яғни жүйенің матрицасы қайтымды.

Олай болса біз (6) формуласын қолдана аламыз. Бұл формула бойынша

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Формуладағы алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-15,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=16,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=0,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-14,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=16,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6.$$

$\det A$ және алгебралық толықтауыштардың мәндерін қойсақ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -45+32+77 \\ -9+0-7 \\ -42+32+42 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз. Бұдан

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

шешімі екендігі шығады.

Крамер ережесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

жүйесінің коэффициенттерінен, олардың орналасу ретін сақтай отыра құрылған

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

анықтауышы *жүйесінің анықтауышы* деп аталады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда жүйенің шешімі

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

формуласымен анықталады, мұндағы Δ_i - Δ анықтауышындағы x_i белгісіздерінің коэффициенттерінен тұратын i -ші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыш.

Мысал 7: Жоғарғыдағы 5-мысалдағы $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін Крамер ережесін қолданып шешіңіз.

Шешімі: Жүйенің анықтауышы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$ онда (7) формуласы бойынша жүйенің шешімі $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ формуласымен анықталады, мұндағы $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - Δ анықтауышындағы сәйкесінше бірінші, екінші, үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыштар:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

Бұдан

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{64}{-16} = -4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{32}{-16} = -2.$$

Ескерту.

- Егер $\Delta = 0$ және $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$ болса, онда *(3) жүйесінің шексіз көп шешімі болады*. Оларды табу жолы келесі бөлімде қарастырылады.

- Егер $\Delta = 0$ және қандай да бір i үшін $\Delta_i \neq 0$ болса, онда *(3) жүйесінің шешімі болмайды (жүйе үйлесімсіз болады)*.

Жордан-Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі)

Матрицалық және Крамер әдістерін тек жолдарының саны бағандарының санына тең және де анықтауышы нөлден өзгеше жүйелерді шешу үшін ғана қолдана аламыз. *Гаусс әдісінің ерекшелігі* – оны кез келген жүйеге қолдануға болады.

Бұл әдіс жүйенің бір теңдеуін оған басқа бір теңдеуді бір санға көбейтіп алып қосқанда шыққан теңдеумен ауыстырғаннан жүйенің шешімі өзгермейді деген тұжырымға негізделген.

Аталған түрлендіруді тізбектеп қолдана отырып (3) жүйесінің теңдеулерінде белгісіздерді жою арқылы жүйе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n-1n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)} \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

түріндегі *үшбұрышты анықталған жүйеге* немесе *белгісіздер саны теңдеулер санынан артық болатын жүйеге* немесе *үйлесімсіз жүйеге* әкелінеді.

Бірінші жағдайда соңғы теңдеуден x_n *белгісізін* тауып алып төменнен санағанда екінші теңдеуге қою арқылы x_{n-1} *белгісізін* табамыз, сонан соң x_{n-1}, x_n мәндерін келесі теңдеуге қойып x_{n-2} *мәнін* табамыз. Осы үрдісті соңғы теңдеуге (төменнен санағанда) жеткенше жалғастырып жүйенің шешімін табамыз.

Мысал 8: Жоғарғыдағы 5-мысалдағы $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін

Жордан-Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешімі: Екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жою үшін:

a) бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз;

b) бірінші теңдеуді (–3)-ке көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 0 - 6x_2 - x_3 = -4 \\ 0 - 16x_2 + 0 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -6x_2 - x_3 = -4 \\ -16x_2 = -16 \end{cases}$$

жүйесінің үшінші теңдеуінен x_2 белгісізін тауып, оны екінші теңдеудегі орнына қойсақ x_3 белгісізі, ал табылған x_2, x_3 белгісіздерін бірінші теңдікке қойсақ x_1 белгісізі табылады:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_2 + x_3 + 3 \\ x_3 = 4 - 6x_2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_3 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

ә) $n > m$ - белгісіздер саны теңдеулер санынан көп болған жағдай

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, n > m \qquad (8)$$

Егер жүйенің қандай да бір белгісіздерінің коэффициентерінен құрылған анықтауыш нөлден өзгеше болса, онда осы *m* белгісіздер *жүйенің базистік белгісіздері* деп аталады.

(8) жүйесінің қандай да бір m базистік белгісіздері бар болсын. Біз оларды жүйенің теңдеулерінің сол жағында белгісіздер ретінде қалдырып, қалған $n-m$ белгісіздерді тұрақты деп ұйғарып теңдеулердің оң жақтарына шығарамыз.

Нәтижесінде m белгісізді m теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің анықтауышы нөлден өзгеше болғандықтан (себебі ол базистік белгісіздердің коэффициенттерінен тұрады) оның жалғыз шешімі болады. Ол шешім бос мүшелер мен тұрақтылар деп ұйғарылған базистік емес белгісіздердің мәндерінен тәуелді болып шығады. Бұл шешім *жүйенің жалпы шешімі* деп аталады. Жалпы шешімнен базистік емес белгісіздерге белгілі мәндер бергенде пайда болатын шешім *жүйенің дербес шешімі* деп аталады. Базистік емес белгісіздерге кез келген мәндер беруге болғандықтан жүйенің шексіз көп дербес шешімдері болады.

Базистік емес белгісіздердің барлығын нөлге тең деп алғанда пайда болған дербес шешім берілген базистік белгісіздерге (базиске) сәйкес *базистік шешім* деп аталады.

Әрбір базиске бір базистік шешім сәйкес келетіндіктен, барлық базистік шешімдер саны барлық базистер санынан артпайды. Ал барлық базистер саны $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ теру санынан артпайды.

Мысал 9:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 6x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 10 \end{cases}$$

$$k = 2,\ n = 5 \Rightarrow n > k$$

x_1, x_2 - базистік белгісіздер бола ала ма? Олардың коэффициенттерінен құрылған анықтауыш

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Олай болса x_1, x_2 базистік белгісіздер бола алады.

x_1, x_3 - базистік белгісіздер бола ма?

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Олай болса x_1, x_3 базистік белгісіздер бола алмайды.

Сол сияқты: x_1, x_4 - базистік; x_1, x_5 - базистік; x_2, x_3 - базистік; x_2, x_5 - базистік; x_3, x_4 - базистік; x_3, x_5 - базистік; x_4, x_5 - базистік болатынын, ал x_2, x_4 - базистік болмайтынын көрсетуге болады.

Мысалымызда x_1, x_2 белгісіздерін базистік деп алайық (олардың базистік бола алатынын жоғарыда көрсетіп кеткенбіз). Онда x_3, x_4, x_5 базистік емес белгісіздер болады. Оларды тұрақтылар деп ұйғарамыз:

$$x_3 = c_3, x_4 = c_4, x_5 = c_5,$$

мұндағы c_3, c_4, c_5 - еркін тұрақтылар. Еркін тұрақтыларды теңдеулердің оң жақтарына шығарамыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 + 4c_3 - c_4 - 6c_5 \\ x_1 + x_2 = 10 + 2c_3 - c_4 + 2c_5. \end{cases}$$

Алынған жүйені Жордан-Гаусс, матрицалық немесе Крамер әдістерінің бірімен шешеміз:

$$x_1 = -3 + 2c_3 - 8c_5, \quad x_2 = 13 - c_4 + 10c_5$$

Сонымен жүйенің жалпы шешімі:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2c_3 - 8c_5 \\ x_2 = 13 - c_4 + 10c_5 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = c_5 \end{cases}$$

немесе

$\left(-3 + 2c_3 - 8c_5;\ 13 - c_4 + 10c_5;\ c_3;\ c_4;\ c_5\right)$, мұндағы c_3, c_4, c_5 - кез келген сандар (еркін тұрақтылар).

c_3, c_4, c_5 еркін тұрақтыларына мәндер беру арқылы жүйенің дербес шешімдерін аламыз.

Мысалы $c_3 = 1,\ c_4 = 0,\ c_5 = 2$ деп алсақ, $(-17;\ 33;\ 1;\ 0;\ 2)$ дербес шешімін, ал $c_3 = 0,\ c_4 = 0,\ c_5 = 0$ деп алсақ, $(-3;\ 13;\ 0;\ 0;\ 0)$ - x_1, x_2 базисіне сәйкес базистік шешімін аламыз.

б) $n < m$ белгісіздер саны теңдеулер санынан аз жағдай

Бұл жағдайда белгісіздерді біртіндеп жою әдісін қолдансақ берілген жүйе а), ә) жағдайындағы жүйелердің біріне немесе үйлесімсіз жүйеге түрленеді.

Қайталау сұрақтары

1. Жүйенің шешімі ұғымы, мысал.
2. Үйлесімді, үйлесімсіз жүйелер ұғымы, мысал.
3. Анықталған, анықталмаған жүйелер ұғымы, мысал.
4. Кронекер-Капелли теоремасы.
5. Эквивалентті жүйелер ұғымы, мысал.
6. Біртектес теңдеулер жүйесі ұғымы.
7. Жүйенің жалғыз шешімінің бар болу шарты.
8. Жүйенің шексіз шешімдер жиыны бар болу шарты.
9. $n = m$ белгісіздер саны мен теңдеулер саны тең жағдай.
10. Матрицалық әдіс ұғымы.
11. Крамер ережесі ұғымы.
12. Жордан-Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі).
13. $n > m$ белгісіздер саны теңдеулер санынан үлкен болған жағдай.
14. Жүйенің жалпы, дербес шешімдері ұғымдары.
15. Базистік шешім ұғымы.
16. $n < m$ белгісіздер саны теңдеулер санынан кіші жағдай.



n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі берілген. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ жүйенің шешімі болады, яғни жүйе үйлесімді. Біз, қандай жағдайда шешімнің жалғыз немесе одан көп болатынын қарастырамыз.
Егер

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$

болса, онда бұл жағдайда жүйенің жалғыз шешімі болатындықтан (Крамер ережесін қараңыз), *жүйенің* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *жалғыз шешімі бар болады.*

Егер

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

болса, онда $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ болғандықтан *жүйенің шексіз көп шешімі бар болады.*

Мысал 10: $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ біртектес теңдеулер жүйесін шешіңіз.

Шешімі: Жүйенің анықтауышы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

онда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ - жүйенің жалғыз шешімі болады.

Қайталау сұрақтары

1. n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі ұғымы.
2. Біртектес теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімінің бар болу шарты.
3. Біртектес теңдеулер жүйесінің шексіз шешімдер жиыны бар болу шарты.



Сызықтық теңдеулер жүйесінің қолданылуы

Мысал 11: Шаруа қожалығының басшысы былтырғы жылы тұқым шаруашылығына, мал шаруашылығына және көкөніс шаруашылығына барлығы 10 млн теңге салып, 780 мың теңге пайда тапты. Ағымдағы жылы ол тұқым шаруашылығына 2 есе, мал шаруашылығына 3 есе, ал көкөніс шаруашылығына былтырғы деңгейде ақша салуды жоспарлаған. Осының бәріне шаруа қожалығының басшысы 22 млн теңге бөлуді жоспарлады. Егер де ағымдағы жылы тұқым шаруашылығынан 10%, мал шаруашылығынан 8% және көкөніс шаруашылығынан 6% пайда аламын деп ұйғарса, онда шаруа қожалығының басшысы барлығы қанша табыс тапқан болар еді?

Шешімі: Белгілеу енгізейік: x_1 - тұқым шаруашылығына, x_2 - мал шаруашылығына және x_3 - көкөніс шаруашылығына бөлтір салынған ақшалар болсын. Есептің шарты бойынша:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 39 \end{cases}$$

Жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

онда (7) формуласы бойынша жүйенің шешімі

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

формуласымен анықталады, мұндағы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 22 & 3 & 1 \\ 39 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 22 & 1 \\ 5 & 39 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 5 & 4 & 39 \end{vmatrix} = -9.$$

Бұдан

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{-3} = 5, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Сонымен

- ағымдағы жылы тұқым шаруашылығына салынған ақша: $2 \cdot x_1 = 2 \cdot 2 = 4$ млн.т.,
- мал шаруашылығына: $3 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = 15$ млн т.,
- көкөніс шаруашылығына: $x_3 = 3$ млн т.

Ал ағымдағы жылы күтілетін жалпы пайда:

$$4 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}06 = 1{,}78 \text{ млн т.}$$

Мысал 12: Зауытта үш түрлі шикізатты пайдаланып, үш түрлі бұйым шығарады. A бұйымынан - 360 дана, $Б$ бұйымынан - 300 дана және B бұйымынан - 675 дана. Бұйымның түрі және оған кететін әр шикізат мөлшері кестеде көрсетілген:

Бұйымның түрі	Әр бұйымға жұмсалатын шикізаттар мөлшері, салмақ бірлігі / өнім		
	1	2	3
A	3	2	1
$Б$	1	6	2
B	4	1	5

Әр бұйым жасауға кететін әр шикізат қорын табу керек.

Шешімі: x, y, z арқылы әр бұйымды жасауға кететін шикізат қорының шамасын белгілейік. Шикізат қоры тұтас жұмсалады деп есептесек, баланстық (теңгерулік) қатынас былай жазылады:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675 \end{cases}$$

Алынған сызықтық теңдеулер жүйесі A, $Б$ және B бұйымдарын жасауға кететін әр шикізат қорының математикалық үлгісін көрсетеді. Бұл жүйені шешу үшін Гаусс әдісін қолданайық. Жүйенің кеңейтілген матрицасын жазып, оны қарапайым түрлендірулер арқылы үшбұрышты түрге келтірейік.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Бастапқы жүйе келесі жүйеге мәндес:

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300 \\ 2y + 9z = 570 \\ -67z = -4020. \end{cases}$$

Соңғы теңдеуден z=60; z -тің табылған мәнін екінші теңдеуге қойсақ y=15 және бірінші теңдеуден x=90.

Сонымен, $C(90, 15, 60)$ векторы жүйенің шешімін береді, яғни шығарылатын бұйымдарға кететін әр шикізат қорының санын көрсетеді.

Мысал 13: Үш қорытпаның жалпы салмағы 150 кг. Бірінші қорытпаның құрамында 60% мыс, екіншісінде - 30%, үшіншісінде- 10%. Екінші және үшінші қорытпадағы мыс екеуін қосқанда, бірінші қорытпадағы мыстан 28,4 кг аз, ал үшінші қорытпадағы мыс екіншіге қарағанда 6,2 кг аз. Әр қорытпаның салмағын табыңыз.

Шешімі: $x,\ y,\ z$ арқылы әр қорытпаның салмағын белгілейік сонда теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x+y+z=150 \\ 0,6x-0,3y-0,1z=28,4 \\ 0,3y-0,1z=6,2 \end{cases}$$

Екінші, үшінші теңдеулерді 10-ға көбейтсек эквивалентті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x+y+z=150 \\ 6x-3y-z=284 \\ 3y-z=62 \end{cases}.$$

Жүйенің кеңейтілген матрицасын қарастырайықта, Гаусс әдісін қолданайық:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 6 & -3 & -1 & 284 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -9 & -7 & -616 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 9 & 7 & 616 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \\ 0 & 9 & 7 & 616 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \\ 0 & 0 & 10 & 430 \end{array}\right].$$

Бұдан

$$\begin{cases} x + y + z = 150 \\ 3y - z = 62 \\ 10z = 430 \end{cases}$$

Жүйенің шешімі: $z = 43, \quad y = 35, \quad x = 72$.

Қайталау сұрақтары

1. Келтірілген мысалдарды талдап, қай салаға қатысты екенін түсіндіріңіз.
2. Сызықтық теңдеулер жүйесінің қолданбаларына өз мысалыңызды келтіріңіз.



Әдебиеттер тізімі

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

