Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 1

СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Матрицалар және анықтауыштар

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Матрица және оларға қолданылатын амалдар;
2. Квадраттық матрицалар;
3. Анықтауыштар;
4. Кері матрицалар;
5. Тарихи мағлұматтар;
6. Матрицалар мен анықтауыштардың қолданбалары.

Матрица және оларға қолданылатын амалдар

Анықтама 1. $m \times n$ *өлшемді матрица* немесе $(m \times n)$ - *матрицасы* деп

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = (a_{ij}) = \|a_{ij}\|, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

түріндегі m жол (жатық жол) мен n бағаннан (тік жолдан) тұратын тіктөртбұрышты кестені айтамыз. a_{ij} - *матрицаның элементі* деп аталады, мұндағы i, j индекстері сәйкесінше a_{ij} элементі орналасқан жол мен бағанның нөмірлерін көрсетеді.

A матрицасы, оның өлшемі көрсетіле отырып, $A(m \times n)$ немесе $A(m, n)$ түрінде де белгіленеді.

Мысал 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасы - 2×3 өлшемді матрица.

Матрицаның a_{21}, a_{13} элементтерін көрсетейік:

$$a_{21} = 0, a_{13} = 3 .$$

Тек бір жолдан немесе бір бағаннан тұратын матрицаны сәйкесінше *жол-матрица* немесе *баған-матрица* деп атаймыз:

$A(1,m)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix}$ - жол матрица,

$B(n,1)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - баған матрица.

Мысал 2:

$A(1,3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - жол матрица,

$B(2,1)=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ - баған матрица.

Анықтама 2. Элементтерінің барлығы нөлге тең матрица *нөлдік матрица* деп аталады. Нөлдік матрица әдетте O әрпімен белгіленеді:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ - *нөлдік матрица.*

Анықтама 3. *Матрицалар тең* деп аталады, егер олардың

1) өлшемдері тең;
2) сәйкес элементтері тең болса

$$A(m\times n)=\mathrm{B}(\mathrm{s}\times\mathrm{p})\Leftrightarrow \mathrm{m}=\mathrm{s},\ \mathrm{n}=\mathrm{p},\ a_{ij}=b_{ij},\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

мұндағы a_{ij}, b_{ij} - сәйкесінше *A* және *B* матрицаларының элементтері.

Мысал 3: $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 4\end{pmatrix}$ матрицалары тек $x=2$ және $y=3$ болғанда ғана тең болады.

Матрицаларға қолданылатын амалдар:

1. *Бірдей өлшемді матрицалардың қосындысы* деп олардың сәйкес элементтерінің қосындыларынан тұратын матрицаны айтамыз.
   A, B матрицаларының қосындысы $A+B$ түрінде белгіленеді.
   Егер

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\ i=\overline{1,m}\ ,\quad j=\overline{1,n}$$

болса, онда

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),\quad i=\overline{1,m}\ ,\quad j=\overline{1,n}$$

болады.

Мысал 4: $A=\begin{pmatrix}-4 & 6 & -2\\ 2 & -5 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 7 & -5\\ 3 & -4 & -3\end{pmatrix}$ матрицаларының қосындысын табыңыз.

Шешімі:

$$\begin{pmatrix}-4 & 6 & -2\\ 2 & -5 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 7 & -5\\ 3 & -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-1 & 6+7 & -2-5\\ 2+3 & -5-4 & 8-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 13 & -7\\ 5 & -9 & 5\end{pmatrix}.$$

Мысал 5: Қосынды анықтамасынан қосынды ұғымы тек бірдей өлшемді матрицалар үшін ғана тән екендігі шығады.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -5 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрицаларының қосындысы дегеннің, олардың өлшемдері бірдей болмағандықтан, мағынасы болмайды.

2. *Матрицаның санға көбейтілуі* деп матрицаның әрбір элементін осы санға көбейткенде пайда болған матрицаны айтамыз.

α саны мен A матрицасының көбейтіндісі $\alpha \cdot A$ түрінде белгіленеді.

Анықтамадан, егер $A = (a_{ij})$ болса, онда

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$$

болатыны шығады.

Анықтама 4. Егер екі матрицаның қосындысы нөлдік матрицаға тең болса, онда олар *қарама қарсы матрицалар* деп аталады.

A матрицасына қарама қарсы матрица $-A$ түрінде белгіленеді:

$$A+(-A)=0.$$

Анықтамадан

$$-A=(-1)\cdot A$$

болатыны шығады.

Анықтама 5. A, B *матрицаларының айырмасы* деп $A+(-B)$ матрицасын айтамыз. A, B матрицаларының айырмасы $A-B$ түрінде белгіленеді.

Анықтамадан

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

болса

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij}),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

болатыны шығады.

Мысал 6: $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $4A - 2B$ матрицасын табыңыз.

Шешімі:

$$4A - 2B = 4\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 12 \\ 20 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 8 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттері:

1. $A+O=O+A$;
2. $A+B=B+A$ (коммутативтілік-ауыстырымдылық);
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативтілік-терімділік);
4. $A-A=O$;
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
6. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$,

мұндағы α, β - сандар, ал A, B матрицалар.

Анықтама 6. $m \times n$ *өлшемді* $A = (a_{ij})$ *матрицасы мен* $n \times p$ *өлшемді* $B = (b_{jk})$ *матрицаларының* $A \cdot B$ *көбейтіндісі* деп i жолымен k бағанында орналасқан c_{ik} элементі

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p}$$

теңдігімен анықталатын $m \times p$ өлшемді C матрицасын айтамыз:

$$A \cdot B = (c_{ik}) = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}), \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p}.$$

Анықтамадан:

1. екі матрицаның көбейтіндісі ұғымының тек сол жақтағы матрицаның бағандар саны оң жақтағы матрицаның жолдар санына тең матрицалар үшін ғана тән болатыны шығады:
   $A(m\times n)B(s\times p)$ - мағыналы $\Leftrightarrow n=s$;

2. жалпы жағдайда $A\cdot B\neq B\cdot A$ болатыны шығады;

3. $A\cdot B$ көбейтіндісінің i жолы мен j бағанында орналасқан c_{ij} элементінің сол жақтағы A матрицасының i жолы мен оң жақтағы B матрицасының j бағанының сәйкес элементтерінің көбейтінділерінің қосындысына тең болатыны шығады.

Мысал 7: $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ матрицалары берілген.

$A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot C,\ C\cdot A$ көбейтінділерін табыңыз.

Шешімі:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+3\cdot 7 & 0\cdot 2+3\cdot 6\\ 5\cdot 1+4\cdot 7 & 5\cdot 2+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 18\\ 33 & 34\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 4\\ 7\cdot 0+6\cdot 5 & 7\cdot 3+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 11\\ 30 & 45\end{pmatrix}.$$

Есептеуіміз бойынша $A\cdot B\neq B\cdot A$.

$A\cdot C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ көбейтіндісі болмайды, себебі сол жақтағы матрицаның бағандарының саны оң жақтағы матрицаның жолдар санына тең емес: $2\neq 3$.

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 0+0\cdot 5 & 4\cdot 3+0\cdot 4\\ 0\cdot 0+3\cdot 5 & 0\cdot 3+3\cdot 4\\ 1\cdot 0+5\cdot 5 & 1\cdot 3+5\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12\\ 15 & 12\\ 25 & 23\end{pmatrix}.$$

Анықтама 7. Егер $A \cdot B = B \cdot A$ болса, онда A және B матрицалары *ауыстырымды* деп аталады.

Мысал 8: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ матрицалары үшін

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

яғни $A \cdot B = B \cdot A$, *олай болса* A және B матрицалары - ауыстырымды матрицалар.

Қосынды мен көбейтінділердің қасиеттері:

1. $A(BC)=(AB)C$;
2. $A(B+C)=AB+AC$;
3. $(A+B)C=AC+BC$;
4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B$.

Анықтама 8. *A* матрицасының жолдарын сәйкес бағандарымен алмастыруды *A* матрицасын *транспонирлеу (тасымалдау)* дейміз де, пайда болған матрицаны *транспонирленген (тасымалданған) матрица* деп атаймыз. Транспонирленген матрица A^T түрінде белгіленеді.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мысал 9: *A* матрицасын транспонирлеңіз:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Транспонирлеу амалының қасиеттері:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T;$
2. $(AB)^T = B^T A^T.$

Қайталау сұрақтары

1. Матрица дегеніміз не? Белгіленуі.
2. Жол-матрица немесе баған-матрица ұғымдары, мысалдары.
3. Нөлдік матрица ұғымы, белгіленуі.
4. Тең матрицалар ұғымы, мысал.
5. Матрицалардың қосу және санға көбейту, мысалдары.
6. Қарама-қарсы матрицалар, матрицалардың айырмасы ұғымдары, мысалдары.
7. Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттері.
8. Матрицалардың көбейтіндісі, мысал.
9. Ауыстырымды матрицалар ұғымы, мысал.
10. Транспонирленген матрица ұғымы, мысал.
11. Транспонирлеу амалының қасиеттері.



Квадраттық матрицалар

Анықтама 9. Егер матрицаның жолдар саны мен бағандар саны тең болса, онда матрица *квадраттық (текше, шаршы, квадрат) матрица* деп аталады.

$A(n \times n)$ - квадраттық матрицасын n - *ші ретті квадраттық матрица* деп атаймыз.

Анықтама 10. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - $(n \times n)$ квадраттық матрицасының

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ бірдей индексті элементтері *бас диагональ элементтері*, ал $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ элементтері *қосалқы диагональ элементтері* деп аталады.

Мысал 10: $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ квадраттық матрицасының

- бас диагональ элементтері: $4, 0, 6$;
- қосалқы диагональ элементтері: $3, 0, 5$.

Анықтама 11. Бас диагональ элементтерінен басқа элементтері нөлге тең квадраттық матрица *диагональдық матрица* деп аталады:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - диагональдық матрица.

Анықтама 12. Бас диагональ элементтерінің барлығы бірге тең диагональдық матрица *бірлік матрица* деп аталады. Бірлік матрица E әрпімен белгіленеді.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ - бірлік матрица.

Анықтама 13. Квадраттық матрица *үшбұрышты* деп аталады, егер оның бас диагональдық элементтерінен төмен (жоғары) орналасқан барлық элементтері нөлге тең болса. Үшбұрышты матрицалар *жоғарғы үшбұрышты* және *төменгі үшбұрышты* болып екіге бөлінеді:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - жоғарғы үшбұрышты матрица;

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$ - төменгі үшбұрышты матрица.

Қайталау сұрақтары

1. Квадраттық (текше, шаршы) матрица ұғымы, мысалдары.
2. Бас және қосалқы диагональ элементтері, мысалдары.
3. Диагональдық және бірлік матрица ұғымдары, мысалдары.
4. Үшбұрышты, жоғарғы үшбұрышты және төменгі үшбұрышты матрицалар ұғымдары, мысалдары.



Анықтауыштар

Анықтауыш ұғымын енгізу үшін келесі ұғымдарды енгіземіз.

Анықтама 14. n *натурал санының факториалы* деп

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

санын айтамыз.

Ескерту. $0! = 1$.

Мысал 11: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Анықтама 15. Берілген бірнеше санның қандай да бір ретпен орналасуы *ауыстыру* деп аталады.

Мысал 12: 1, 3, 4, 9 сандарының барлық мүмкін ауыстыруларының саны:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

яғни барлық ауыстырулар 24:

1.	1, 4, 9, 3	**7.**	4, 1, 9, 3	**13.**	9, 1, 4, 3	**19.**	3, 1, 4, 9
2.	1, 4, 3, 9	**8.**	4, 1, 3, 9	**14.**	9, 1, 3, 4	**20.**	3, 1, 9, 4
3.	1, 9, 4, 3	**9.**	4, 9, 1, 3	**15.**	9, 4, 1, 3	**21.**	3, 4, 1, 9
4.	1, 9, 3, 4	**10.**	4, 9, 3, 1	**16.**	9, 4, 3, 1	**22.**	3, 4, 9, 1
5.	1, 3, 4, 9	**11.**	4, 3, 1, 9	**17.**	9, 3, 1, 4	**23.**	3, 9, 1, 4
6.	1, 3, 9, 4	**12.**	4, 3, 9, 1	**18.**	9, 3, 4, 1	**24.**	3, 9, 4, 1

Мысал 13: 9, 3, 1, 4 ауыстыруының инверсияларының санын анықтау керек.

Шешімі: Ауыстырудың екі санынан, олардың орналасу ретін сақтай отыра құрылған барлық жұптары:

(9, 3), (9, 1), (9, 4), (3, 1), (3, 4), (1, 4).

1. (9, 3) – 9 > 3, сондықтан (9, 3) – инверсия.
2. (9, 1) – 9 > 1, сондықтан (9, 1) – инверсия.
3. (9, 4) – 9 > 4, сондықтан (9, 4) – инверсия.
4. (3, 1) – 3 > 1, сондықтан (3, 1) – инверсия.
5. (3, 4) – 3 < 4, сондықтан (3, 4) – инверсия емес.
6. (1, 4) – 1 < 4, сондықтан (1, 4) – инверсия емес.

9, 3, 1, 4 ауыстыруында барлығы 4 инверсия бар: (9,3), (9,1), (9,4), (3,1).

Ескерту.

1) Анықтамадан инверсия ұғымының тек берілген сандардың санының екіден кем болмайтын жағдайға ғана тән екендігі шығады.
2) Бір ғана сан берілген жағдайда инверсия саны нөлге тең деп ұйғарамыз.

Анықтама 17. n – ретті

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадраттық матрицасының *анықтауышы* немесе *детерминанты* деп $n!$ қосылғыштың келесі шарттарды қанағаттандыратын алгебралық қосындысын айтамыз:

1) әрбір қосылғыш матрицаның әр жолы мен әр бағанынан бір бірден ғана алынған элементінің өз таңбасымен немесе қарама-қарсы таңбамен алынған көбейтіндісі болады;
2) егер көбейткіштердің бірінші индекстерінің ауыстыруының инверсияларының саны мен екінші индекстерінің ауыстыруының инверсияларының санының қосындысы екіге бөлінетін сан болса, онда көбейтінді өз таңбасымен алынады, болмаса көбейтінді қарама–қарсы таңбамен алынады.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадраттық матрицасының *анықтауышы* $\det A, |A|$ немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

түрінде белгіленеді.

$n = 1,\ A = (a_{11});\ |A| = a_{11}.$

$A = (a_{11})$ бірінші ретті матрицасының анықтауышын анықтама бойынша тапсақ, n=1 және $n!$=$1!$=1.

Анықтаманың 1) шарты бойынша анықтауыш өз таңбасымен немесе қарама қарсы таңбамен алынған 1 -жол мен 1 – бағанға тиісті жалғыз a_{11} санына тең болады.

Анықтаманың *2) шарты бойынша* a_{11} санының қандай таңбамен алынатынын анықтаймыз:

a_{11} санының бірінші және екінші индекстерінің ауыстырулары жалғыз 1 санынан тұратындықтан, ескертудің 2) тармағы бойынша, олардың инверсиялары нөлге тең болады. Онда олардың инверсияларының қосындысы нөлге тең, яғни екіге бөлінетін сан болады да, анықтаманың 2) шарты бойынша a_{11} саны өз таңбасымен алынады.

Сонымен $|A| = |(a_{11})| = a_{11}.$

Мысал 14: $A = (-5) \Rightarrow |A| = -5.$

Тәжірибелік сабақта бұл анықтама бойынша екінші ретті анықтауышты есептеуді 15-мысалында қарастырамыз (өз беттеріңізбен үшінші ретті анықтауышты есептеп көрсеңіздер).

Әрі бұл мысалдан жоғары ретті анықтауышты оның анықтамасы бойынша есептеу өте күрделі болатынын көруге болады. Сондықтан анықтауышты есептеуде оның қасиеттерін қолданып жеңілдетуге болады.

Мысал №15: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицасының анықтауышын есептеңіз.

Шешімі: біздің жағдайда $n=2$. Қосылғыштар саны

$$n!=2!=2.$$

1) шарты бойынша қосынды өз таңбасымен немесе қарама-қарсы таңбамен алынған $a_{11}a_{22}$ (a_{11} - бірінші жолмен бірінші бағанның жалғыз элементі, a_{22} - екінші жолмен екінші бағанның жалғыз элементі) және $a_{12}a_{21}$ (a_{12} - бірінші жолмен екінші бағанның жалғыз элементі, a_{21} - екінші жолмен бірінші бағанның жалғыз элементі) көбейтінділердің қосындысы болады.

2) шарты бойынша $a_{11}a_{22}$ және $a_{12}a_{21}$ көбейтінділерінің қандай таңбамен алынатынын анықтаймыз:

- $a_{11}a_{22}$ көбейткішінің бірінші және екінші индекстерінің ауыстырулары, сәйкесінші (1,1) және (2,2) түрінде жазылады. Бұл екі ауыстырудың әрқайсысының инверсияларының саны нөлге тең (екеуінде де инверсия жоқ) болғандықтан, олардың инверсияларының сандарының қосындысы нөлге тең, яғни екіге бөлінетін сан болады. Онда, 2) шарты бойынша $a_{11}a_{22}$ көбейткіші өз таңбасымен алынады.
- $a_{12}a_{21}$ көбейткішінің бірінші және екінші индекстерінің ауыстырулары, сәйкесінші (1,2) және (2,1) түрінде жазылады. Бұл екі ауыстырудың біріншісінің инверсияларының саны нөлге (инверсия жоқ) тең және екіншісінің инверсияларының саны бірге тең (себебі 2>1) болғандықтан, олардың инверсияларының сандарының қосындысы бірге тең, яғни екіге бөлінбейтін сан болады. Онда, 2) шарты бойынша $a_{12}a_{21}$ көбейткіші қарама - қарсы таңбамен алынады.

Жауабы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Анықтауыштың қасиеттері:

1 – қасиет. Егер анықтауыштың жолдарын (бағандарын) сәйкес бағандармен (жолмен) алмастырсақ, анықтауыш өзгермейді:

Мысал 16: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ (жолдың бағанмен алмасуы).

2 – қасиет. Егер екі жолдың (бағанның) орындарын алмастырсақ, онда анықтауыш таңбасын өзгертеді:

Мысал 17: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ (екі жолдың алмасуы),

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ (екі бағанның алмасуы).

3 – қасиет. Егер кез келген жолдың (бағанның) барлық элементтері нөлге тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады:

Мысал 18: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ немесе $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

4 – қасиет. Егер қандай да бір екі жолдың (бағанның) сәйкес элементтері тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады:

Мысал 19: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (алғашқы екі жолдың сәйкес элементтері тең);

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 7 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (1 және 3 бағандардың сәйкес элементтері тең).

5 – қасиет. Егер қандай да бір екі жолдың (бағанның) сәйкес элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең болады:

Мысал 20: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (алғашқы екі жол пропорционал);

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (соңғы екі баған пропорционал).

6 – қасиет. Бір жолдың (бағанның) элементтеріне басқа бір жолдың (бағанның) сәйкес элементтерін, оларды алдын ала бір санға көбейтіп алып қосқаннан анықтауыш өзгермейді:

Мысал 21: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{R_1+3R_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 10 & 29 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ немесе $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{C_1+(-1)C_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$.

Анықтауыштың келесі қасиетін тұжырымдау үшін бізге көмекші ұғымдар енгізу қажет.

Анықтама 19.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышының a_{ij} элементінің *миноры* деп, осы анықтауыштың a_{ij} элементі орналасқан i жолы мен j бағанды сызып тастағанда пайда болған анықтауышты айтамыз. a_{ij} элементінің миноры M_{ij} түрінде белгіленеді.

Мысал 22: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 6 \\ 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{23}, a_{31} элементтерінің минорлары:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}, \; M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Анықтама 20. a_{ij} *элементінің алгебралық толықтауышы* деп $(-1)^{i+j}$ саны мен M_{ij} минорының көбейтіндісі аталады да, A_{ij} түрінде белгіленеді:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Мысал 23: $\begin{vmatrix} 5 & 9 & 8 \\ -1 & 2 & -6 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышы берілсе, онда оның a_{21}, a_{33} элементтерінің алгебралық толықтауыштары:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ -7 & 4 \end{vmatrix};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

7 – қасиет. Анықтауыш кез келген жолының немесе кез келген бағанының элементтерінің өздерінің алгебралық толықтауыштарымен көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

(1) теңдігі *анықтауыштың i жолының элементтеріне жіктелінуі*, ал (2) теңдігі *анықтауыштың j бағанның элементтеріне жіктелінуі* деп аталады.

Екінші және үшінші ретті анықтауышты есептеудің қарапайым жолдарын қарастырайық.

Екінші ретті анықтауыштың есептелінуі.

Жол/ баған элементтеріне жіктелінуі бойынша:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Мысал 24: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеңіз.

Шешімі: бірінші жол элементтеріне жіктеп есептеу ((1) формуласында $i = 1$ деп аламыз):

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 4 + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$$

Сонымен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (3)$$

яғни екінші ретті анықтауыш бас диагональ элементтерінің көбейтіндісінен қосалқы диагональ элементтерінің көбейтіндісін азайтқанға тең болады.

Мысал 25: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеңіз.

Шешімі: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23$.

Ескерту. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда оның анықтауышы не функция не сан болуы мүмкін.

Мысал 26: $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

Мысал 27: $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ 1 & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1.$

Үшінші ретті анықтауыштың есептелінуі:

$$n=3.\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\qquad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7 - қасиет бойынша

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

болады. Теңдіктің оң жағындағы үш екінші ретті анықтауыштың әрқайсысын жоғарыда көрсетілген жолмен есептесек

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (4)$$

теңдігін аламыз.

Мысал 28: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ анықтауышын

a) *екінші жол элементтеріне жіктеп есептеу* ((1) формуласында $i = 2$ деп аламыз):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12+9) + 0(6-15) - 4(-3-10) = 42 + 0 + 52 = 94.$$

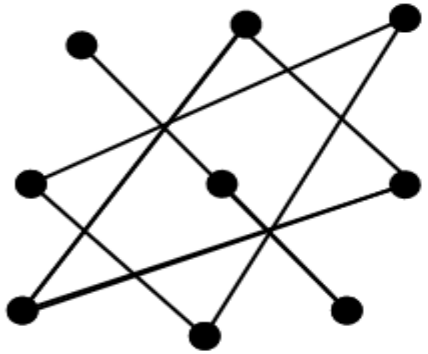
b) *бірінші баған элементтеріне жіктеп есептеу* ((2) формуласында $j = 1$ деп аламыз):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

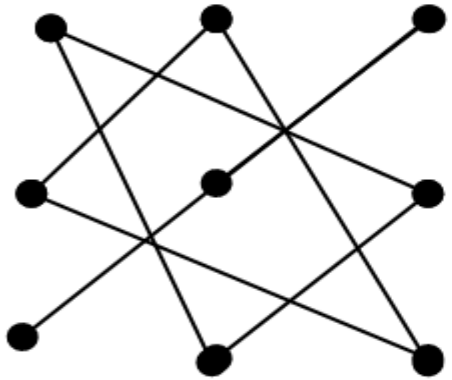
$$= 1(0+12) + 2(12+9) + 5(8-0) = 12 + 42 + 40 = 94.$$

Біз енді осы көбейтінділер мен олардың таңбаларын анықтаудың *үшбұрыштар* және *Саррюс әдісі* деп аталатын екі қарапайым тәсілін келтірейік.

1) Үшбұрыштар әдісі:



- өз таңбасымен алынатын көбейтінділер;

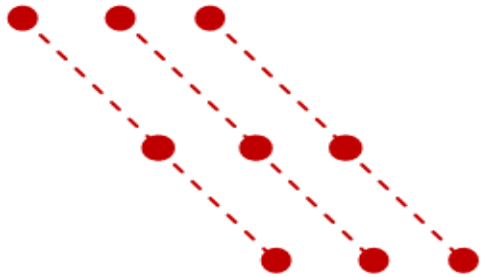


- кері таңбамен алынатын көбейтінділер;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

2) Саррюс әдісі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$



- өз таңбасымен алынатын көбейтінділер;



- кері таңбамен алынатын көбейтінділер.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Мысал 29:

Үшбұрыштар әдісімен анықтауышты есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6+2\cdot 4\cdot 5+(-2)\cdot(-3)\cdot 3-3\cdot 0\cdot 5-(-2)\cdot 2\cdot 6-4\cdot(-3)\cdot 1=$$

$$=0+40+18-0+24+12=94;$$

Саррюс әдісімен анықтауышты есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6+2\cdot 4\cdot 5+3\cdot(-2)\cdot(-3)-3\cdot 0\cdot 5-1\cdot 4\cdot(-3)-2\cdot(-2)\cdot 6=$$

$$=0+40+18-0+12+24=94.$$

Салдар 1: Үшбұрышты матрицаның анықтауышы (үшбұрышты анықтауыш) бас диагональ элементтерінің көбейтіндісіне тең.

Мысал 30: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 = -12.$

8 – қасиет.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0, \text{ егер } i \neq j.$$

8 – қасиет бойынша анықтауыш жіктелінетін жолдың (бағанның) нөлге тең элементтері неғұрлым көп болса анықтауышты есептеу соғұрлым жеңіл болады.

Сондықтан, анықтауышты есептегенде оның 6-қасиетін қатарынан бірнеше (керегінше) рет пайдалану арқылы жіктелу жолының (бағанының) біреуінен басқа барлық элементтерін алдын ала нөлге айналдырып алып 7 – қасиетті қолданған тиімді болады.

Мысал 31: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$

6-қасиетті қолданамыз:

1) 2-ші жолдың элементтеріне 1-ші жолдың сәйкес элементтерін оларды алдын ала 2- ге көбейтіп алып қосамыз;

2) 3-ші жолдың элементтеріне 1-ші жолдың элементтерін, оларды алдын ала (-5)-ке көбейтіп алып қосамыз.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & -9 & -9 \end{vmatrix} =$$

1-ші бағанның элементтеріне жіктейміз

$$= 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -9 & -9 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1 \cdot 1 \cdot (-27 - (-9) \cdot 10) = 63.$$

Қайталау сұрақтары



1. Матрицаның анықтауышы (детерминанты) ұғымы.
2. Бірінші ретті матрицасының анықтауышы, есептелінуі.
3. a_{ij} элементінің миноры ұғымы, мысалдары.
4. a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы, есептелінуі.
5. n ретті $(n>1)$ анықтауыш ұғымы, мысалдары.
6. Екінші ретті анықтауыштың есептелінуі.
7. Үшінші ретті анықтауыштың есептеліну әдістері (үшбұрыштар және Саррюс әдісі)
8. Анықтауыштың қасиеттерін атаңыз.
9. Анықтауыштың i жолының элементтеріне жіктелінуі, мысал.
10. Анықтауыштың j бағанның элементтеріне жіктелінуі, мысал.

Кері матрицалар

Анықтама 22. A квадраттық матрицасы *қайтымды емес* немесе *ерекше матрица* деп аталады, егер $\det A = 0$ болса, кері жағдайда *қайтымды* немесе *ерекше емес* матрица деп аталады.

Мысал 32:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix},\quad \det A = 4\cdot 2 - 1\cdot 8 = 0 \Rightarrow A$$ – ерекше/ *қайтымды емес* матрица;

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\quad \det A = 4\cdot 2 - 1\cdot 5 = 3 \Rightarrow B$$ – ерекше емес/ қайтымды матрица.

Анықтама 23. B квадраттық матрицасы A квадраттық матрицасына *кері матрица* деп аталады, егер $BA = E$ болса (мұндағы E - бірлік матрица).

Әдетте A матрицасынына кері матрица (B матрицасы) A^{-1} түрінде белгіленеді:

$$A^{-1}A = E.$$

Ескерту. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, яғни $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Теорема 1. Егер A - қайтымды матрица болса, онда оның жалғыз A^{-1} кері матрицасы болады да, ол

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

теңдігімен анықталады, мұндағы A_{ij} - $|A|$ анықтауышының a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы, $i, j = \overline{1,n}$.

Ескерту. Қайтымды емес матрицаның кері матрицасы болмайды.

Анықтама 24. A матрицасының элементтерін олардың алгебралық толықтауыштарымен ауыстырғанда пайда болған матрицаны A матрицасының көмекші матрицасы деп атаймыз да A^v түрінде белгілейміз.

Кері матрицаны көмекші матрица арқылы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^v)^T$$

түрінде жазуға болады.

Мысал 33: $A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ матрицасының A^{-1} кері матрицасын табыңыз.

Шешімі: (5) теңдігі бойынша

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}$$

A матрицаның анықтауышын есептесек

$$\det A=\begin{vmatrix}10 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=40-15=25\neq 0\,.$$

Матрица элементтерінің алгебралық толықтауыштарын $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ формуласы бойынша есептейміз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}4=4; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}3=-3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}5=-5; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}10=10.$$

Кері матрица: $A^{-1}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -5 & 10\end{pmatrix}$.

Дұрыстығын тексерейік:

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}10 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -5 & 10\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}40-15 & -30+30\\ 20-20 & -15+40\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

$A\cdot A^{-1}=E$ теңдігі орынды, олай болса A^{-1} шынында да A матрицасының кері матрицасы болады.

Қайталау сұрақтары

1. Қайтымды емес немесе ерекше матрица ұғымы, мысал.
2. Қайтымды немесе ерекше емес матрица ұғымы, мысал.
3. Кері матрица ұғымы.
4. Матрицаның көмекші матрицасы ұғымы.



Тарихи мағлұматтар

Ең алғаш ежелгі Қытай елінде матрица «сиқырлы квадрат» деп аталды.

Кейіннен араб математиктері оларға амалдар енгізді.

17-ші ғасырдың соңында анықтауыштар теориясы дамыды, 1751 жылы Габриэль Крамер «Крамер ережесін» жариялады.

Матрицалар теориясына өз үлестерін қосқандар XIX ғасырда Уильям Гамильтон, Вейерштрасс, Жордан, Фробениус және Артур Кэли.

«Матрица» терминін Джеймс Сильвестр 1850 жылы енгізді.

Фотографиядағы матрица – бұл интегралдық микросхема (аналогтік және сандық-аналогтік);

Матрица – цифрлық фотоаппараттардың, барлық заманауи видео- және телекамера, фотокамера, мобильдік телефон мен видеобайқау жүйесінің негізгі элементі.

Матрицалар мен анықтауыштардың қолданбалары

Матрица мен анықтауыштар көмегімен сызықтық алгебралық және дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге болады.

Матрица мен анықтауыштар теориясы экономикада, биологияда, химияда және маркетингте де өз қолданысын тапты.

Анықтауыштар n белгісізі бар n сызықты теңдеулер жүйесін шешуде және зерттеуде кең қолданылады. Мұндай жүйенің анықтауыштар арқылы шешу ережесі Крамер ережесі деп аталады. Сондай-ақ анықтауыштар кері матрицаны анықтауда да пайдаланылады.

Аналитикалық геометрияда анықтауыштардың қолданбалары өте көп. Оларды қолданып үшбұрыштың ауданын, параллелепипед пен пирамиданың көлемін есептеуге, векторлардың компланарлығын тексеруге болады.

Еселі интегралдарды есептеу кезінде айнымалыларды басқа айнымалыларға ауыстырғанда түрлендіру Якоби анықтауышы арқылы анықталады.

Қандай да бір құбылысты матрицалық түрде өрнектеу қажет болған жағдайда анықтауыштың пайдалануын таба аласыз. Көрінетін барлық кескіндер матрицаның кейбір түрінде компьютерде көрінеді. Сондай-ақ 3D көріністер, графика және т.б. үшін матрицаны кеңінен қолданылады, мұнда анықтауыштарды қолдану қажет болуы мүмкін. Осылайша, нақты сценарийлерден қолданылулар табуға болады. Олар негізінен ғылым мен техника салаларында қолданылады. Сонымен, әртүрлі саладағы инженерлер анықтауыштарды тәжірибеде және қолданыстарда пайдалана алады.

Мысал 34: Кәсіпорын екі түрлі шикізатты пайдаланып, үш түрлі өнім шығарсын. Жұмсалатын шикізаттың нормасы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ матрицасы арқылы, шикізаттың әр түрінің бірлік бағасы $P=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$ матрицасы арқылы, ал өнімді шығару жоспары $B=(100\ \ 200\ \ 300)$ матрицасы арқылы берілсін. Жоспарлы өнімді шығаруға кететін шикізаттың шығыны мен шикізаттың жалпы құнын есептеу керек.

Шешімі: Жоспарлы өнімді шығаруға кететін шикізаттың шығыны:

$$S = B \cdot A = (100 \quad 200 \quad 300) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (100 \cdot 1 + 200 \cdot 4 + 300 \cdot 5 \quad 100 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 300 \cdot 1) =$$

$$= (2400 \quad 1000).$$

Шикізаттың жалпы құны:

$$Q = S \cdot P = (2400 \quad 1000) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(2400 \cdot 2 + 1000 \cdot 4\right) = 8800.$$

Мысал 35: Кестеде 1 және 2 нан зауытынан күн сайын M_1, M_2 және M_3 дүкендеріне жөнелтілетін өнімдердің саны көрсетілген және әр зауыттан дүкендерге өнімді жеткізуге кеткен шығындары берілген, яғни M_1 дүкеніне 50 мың теңге, M_2 дүкеніне 70 мың тенге, ал M_3 дүкеніне 130 мың тенге. Әр зауыттың күнделікті тасымалдауға кеткен шығынын есептеу керек.

Нан зауыты	*Дүкендер*		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Шешімі: Кестедегі берілген шарттарды A матрицасы деп, B матрицасы арқылы дүкендерге өнімдерді жеткізуге кеткен шығындарды белгілейік, яғни

$$A=\begin{pmatrix}20 & 35 & 10\\ 15 & 27 & 8\end{pmatrix},\quad B=(50\ \ 70\ \ 130).$$

Сонда тасымалдауға кеткен шығын матрицасы мына түрде болады:

$$AB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}20 & 35 & 10\\ 15 & 27 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 70\\ 130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cdot 50+35\cdot 70+10\cdot 130\\ 15\cdot 50+27\cdot 70+\ 8\cdot 130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4750\\ 3680\end{pmatrix}.$$

Сонымен, бірінші зауыт күн сайын тасымалдауға 4750 мың теңге, екінші зауыт 3680 мың теңге жұмсайды екен.

Қайталау сұрақтары

1. Тарихи мағлұматтар.
2. Матрицалар мен анықтауыштардың қолданбалары.



Әдебиеттер тізімі

1. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларының жинағы: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2021, - 360 б.
2. Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / - Астана, С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ баспасы, 2023, - 392 б.
3. Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / – Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.
4. Байарыстанов А.О., Идирисов Ж.М. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия теориясы мен есептері: оқу құралы.- Алматы, Нур-Принт, 2019. – 178 б.
5. Абдиманапова П.Б. Математика: оқу құралы / – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б.

Назар аударғаныңызға рақмет!

