

15 дәріс. Тұрақты коэффициентті сызықты теңдеулер.

Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу.

Мына түрдегі

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (35)$$

теңдеу, мұндағы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - тұрақты нақты сандар, **коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Бұл теңдеудің дербес шешімін

$$y = e^{\lambda x} \quad (36)$$

түрінде іздейміз. Осы функцияны дифференциалдап, (35) теңдеуге қойсақ, теңдеу мына түрге келеді:

$$\begin{aligned} \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + a_2 \lambda^{n-2} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} &= 0 \Rightarrow \\ e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) &= 0, \text{ мұндағы } e^{\lambda x} \neq 0, \text{ ендеше} \\ \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

(37)- теңдеу берілген (35)- біртекті сызықты дифференциалдық теңдеуге сәйкес **сипаттаушы теңдеу**, ал

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (38)$$

сипаттаушы көпмүшелік деп аталады.

Сипаттаушы теңдеудің шешімі болатын әрбір $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ үшін $y_i = e^{\lambda_i x}, i = 1, 2, \dots, n$ шешімі сәйкес келеді. (37) сипаттаушы теңдеуді шешкенде келесі үш жағдай болуы мүмкін.

а) (37) сипаттаушы теңдеудің түбірлері: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - әртүрлі және нақты. Онда (35) теңдеудің дербес шешімдері:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (39)$$

Ал, жалпы шешім мына түрде жазылады:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \quad (40)$$

мұндағы $C_1, C_2, \dots, C_n$ - ерікті тұрақтылар.

б) (37) сипаттаушы теңдеудің түбірлері: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - кейбіреуі k еселі болсын. Онда (35) теңдеудің жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$y = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (41)$$

в) (37) сипаттаушы теңдеудің түбірлері: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - ішінде комплекстілері болсын, яғни, мысалы, $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, онда (9.35) теңдеудің жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}. \quad (42)$$

Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Мына түрдегі

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (43)$$

теңдеу, мұндағы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - тұрақты нақты сандар, **коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Бұл теңдеудің шешімін екі шешімнің қосындысы түрінде іздейміз:

$$y = y^* + \bar{y}, \quad (44)$$

мұндағы y^* - берілген (43) біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің кез келген бір дербес шешімі, $\bar{y}$ - (43) теңдеуге сәйкес келетін біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі (жоғарыда келтірілген).

(43) біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің кез келген бір дербес шешімін табу, оның оң жағындағы $f(x)$ функциясының түріне негізделіп алынады. Демек,

дербес шешім табу жәй амалдар қолдану арқылы сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін дифференциалдау мен шешуге келіп тіреледі. Бұл тәсіл **дербес шешімді сұрыптау** немесе **анықталмаған коэффициенттер тәсілі** деп аталады.

(43)-біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функциясы жалпы мына түрде алынады:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (45)$$

мұндағы $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - коэффициенттері тұрақты және нақты, сәйкес n - ші және m - ші дәрежелі көпмүшеліктер. Жеке жағдайларды қарастырайық.

$$1) f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \text{ яғни } f(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) \quad (46)$$

түрінде берілсін, мұнда $A_0 \neq 0$.

Бұл жағдайда y^* -дербес шешімді мына түрде іздейміз:

$$y^* = x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n), \quad (47)$$

мұндағы k – сипаттаушы теңдеудің α - ға тең түбірлерінің еселігі, $B_0, B_1, \dots, B_n$ - анықталмаған коэффициенттер.

а) α -сипаттаушы теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq \lambda_i, i=1,2,\dots,n$, онда $k=0$. Ендеше біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі мына түрде ізделінеді:

$$y^* = e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n). \quad (48)$$

Анықталмаған коэффициенттерді табу үшін y^* функциясын n рет дифференциалдап, (46) теңдеуге қоямыз. Алынған теңдіктің екі жағын да $e^{\alpha x} \neq 0$ шамасына қысқартып, теңдіктің сол және оң жағындағы x - тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп, сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Жүйені шешіп, анықталмаған коэффициенттерді табамыз және олардың мәндерін (48) дербес шешім формуласына қоямыз.

б) α -сипаттаушы теңдеудің k еселі түбірі болса, яғни $\alpha = \lambda_i, i=1,2,\dots,k$, онда біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі мына түрде ізделінеді:

$$y^* = x^k e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n), \quad (49)$$

мұндағы $B_0, B_1, \dots, B_n$ - анықталмаған коэффициенттер.

Анықталмаған коэффициенттер а) жағдайындағы тәсілмен табылады.

$$2) f(x) = e^{\beta x} (P_n(x) \cos \alpha x + Q_m(x) \sin \alpha x)$$

түрінде берілсін, мұнда α, β - нақты сандар. Бұл жағдайда y^* -дербес шешімді мына түрде іздейміз:

$$y^* = x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_l(x) \cos \beta x + N_l(x) \sin \beta x), \quad (50)$$

мұндағы k – сипаттаушы теңдеудің $\alpha + i\beta$ -ға тең түбірлерінің еселігі, $M_l(x)$, $N_l(x)$ - анықталмаған коэффициенттері бар l - ретті көпмүшеліктер, $l = \max(n, m)$ - көпмүшеліктерінің ең үлкен дәрежесі, яғни $l = \max(n, m)$.

$M_l(x)$, $N_l(x)$ көпмүшеліктерінің коэффициенттерін табу үшін (50) функцияны (45) - ке қойғаннан кейін, теңдеудің екі жағындағы аттас тригонометриялық функциялардың алдындағы көпмүшеліктерді теңестіреді.