

Жалпы түсінік. Коши есебі.

Берілген

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

немесе ең жоғарғы туындысы арқылы шешілген

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

теңдеулер n -ші ретті дифференциалдық теңдеу деп аталады. n -ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $C_1, C_2, \dots, C_n$ n тұрақтыдан тәуелді, яғни

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (25)$$

n рет үзіліссіз дифференциалданатын функция болады. Ендеше, (1) немесе (2) дифференциалдық теңдеулердің жалпы интегралы

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (26)$$

теңдігімен анықталады.

Теорема (Коши есебі шешімінің бар және оның жалғыз болуы жөнінде).

(9.1) немесе (9.2) дифференциалдық теңдеу және (9.27) бастапқы шарттар берілсін.

Егер $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функциясы $R^{(n+1)} \ni (x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$ нүктесінің

белгілі бір маңайында үзіліссіз және үзіліссіз $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ дербес туындылары

болса, онда ол дифференциалдық тендеудің x_0 нүктесінің белгілі бір маңайында анықталған және берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімі бар және ол шешім жалғыз болады.

Жоғарғы ретті дифференциалдық тендеуді интегралдау тәсілдері.

а) (2) n – ші ретті дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы функция тәуелсіз айнымалы x -тен ғана тәуелді болсын, яғни теңдеу мына түрде берілсін:

$$y^{(n)} = f(x). \quad (28)$$

Тендеуді шешу үшін ретін төмендету тізбектеп интегралдау арқылы жүзеге асады. Сонда

$$\left. \begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x)dx + C_1, \\ y^{(n-2)} &= \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2, \\ &\dots\dots\dots \\ y &= \int \left(\int \dots \left(\int f(x)dx \right) \dots dx \right) dx + \frac{1}{(n-1)!} C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n. \end{aligned} \right\}$$

яғни (28) дифференциалдық теңдеуді интегралдау арқылы алынған $f(x)$ функциясының n -ші ретті алғашқы функциясы теңдеудің жалпы шешімі болады.

б) (1) дифференциалдық теңдеудің құрамында ізделіп отырған $y = f(x)$ функциясы мен оның $(k-1)$ – ретті туындысын қоса алғандағы туындылары енбейтін болсын, яғни теңдеу мына түрде берілсін:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (29)$$

Теңдеуді шешу үшін жаңа $z = z(x)$ айнымалысын енгіземіз:

$$z = y^{(k)}. \quad (30)$$

Сонда, берілген (29) тендеу мына түрге келеді: $F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Тендеуді шешіп, $y^{(k)} = z$ дифференциалдық теңдеуін аламыз, ары қарай а) жағдайындағыдай k рет дифференциалдау арқылы шешіледі.

в) (1) дифференциалдық теңдеудің құрамында тәуелсіз айнымалы x енбейтін болсын, яғни теңдеу мына түрде берілсін:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (31)$$

Теңдеуді шешу үшін мына алмастыруды енгіземіз:

$$y' = p, \quad p = p(y). \quad (32)$$

Сонда

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = p = p(y), \\ y'' &= \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p \frac{d^2 p}{dy^2} \right] p, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

онда берілген теңдеу мына түрге келеді:

$$\Phi(y, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}) = 0, \quad (34)$$

яғни $p = p(y)$ функциясы бойынша $(n-1)$ -ші ретті дифференциалдық теңдеу. $p = p(y)$

(34) теңдеудің шешімі болады. Ол $p = \frac{dy}{dx}$ және теңдеудің реті $(n-1)$ болғандықтан,

$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ берілген (31) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады.