

13 дәріс. Сызықты теңдеулер.

Анықтама. Изделінетін $y = y(x)$ функциясы және оның туындысы арқылы сызықты болатын

$$y' + P(x)y = f(x) \quad (8)$$

теңдеуі **бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу** деп аталады, мұндағы $P(x)$, $f(x)$ - $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз функциялар. Егер $f(x) = 0$ болса, онда

$$y' + P(x)y = 0 \quad (9)$$

біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу деп аталады, ал $f(x) \neq 0$ болса, **біртекті емес** сызықты дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Сызықты дифференциалдық теңдеуді интегралдау тәсілдері.

а) Айнымалыларды алмастыру тәсілі немесе Бернулли тәсілі.

(8) сызықты дифференциалдық теңдеуді шешу үшін теңдеудің шешімін

$$y = u \cdot v \quad (10)$$

түрінде іздейміз, мұндағы $u = u(x)$, $v = v(x)$ (a, b) аралығында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. Онда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ болады да, (8) теңдеу мына түрге келеді:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x)uv = f(x) \Leftrightarrow u \cdot v' + v[u' + P(x)u] = f(x). \quad (11)$$

$u \neq 0$ болғандықтан (11) теңдеуді интегралдау келесі айнымалылары ажыратылған екі теңдеуді интегралдауға келтіріледі: $u' + P(x)u = 0$ және $u \cdot v' = f(x)$. Квадрат жақша ішіндегі өрнек нөлге тең болатындай $u = u(x)$ функциясын таңдап аламыз. Ол үшін

бірінші теңдеуден $u' = -P(x)u$, $\frac{du}{u} = -P(x)dx$, бұл теңдеудің дербес шешімдерінің бірі

$$\ln u = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}, \quad \text{ал екінші теңдеуден } v' = \frac{f(x)}{u}, \quad dv = f(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx. \quad \text{Бұдан}$$

$v = \int f(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$ жалпы шешімін тауып, оларды (9.10) - ға қойып, (9.8) сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y(x) = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \left(\int f(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Бернулли теңдеуі.

$\alpha \in R$ нақты саны үшін

$$y' + P(x)y = f(x)y^\alpha \quad (12)$$

түрінде берілген теңдеу **Бернулли теңдеуі** деп аталады, мұндағы $P(x)$, $f(x)$ - берілген үзіліссіз функциялар және $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Бернулли теңдеуін шешу үшін алмастыру арқылы сызықтық теңдеуге келтіруге болады, яғни (12) теңдеудің екі жағын да $y \neq 0$ деп, $y^{-\alpha}$ шамасына көбейтеміз, сонда:

$$y^{-\alpha} \cdot y' + P(x)y \cdot y^{-\alpha} = f(x)$$

теңдеуінде $z = z(x)$ деп, $z = y^{-\alpha+1}$ белгілеуін енгіземіз. Сонда

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y' \Rightarrow y^{-\alpha} \cdot y' = \frac{1}{1-\alpha} z'. \quad \text{Демек, Бернулли теңдеуі осы функцияға қатысты}$$

сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіріледі: $\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x)z = f(x)$. Бұл z - ке қатысты

сызықты дифференциалдық теңдеу, оны шешіп, $z(x)$ функциясын тауып, $z = y^{1-\alpha}$ белгілеуін ескеріп, белгісіз $y(x)$ шешімін табамыз.