12 дәріс. Дифференциалдық теңдеулер

Анықтама. Тәуелсіз x айнымалы, ізделінетін функция $y = y(x)$ және тәуелсіз айнымалы бойынша алынған оның туындыларын байланыстыратын

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

теңдігі **дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Теңдеуге кіретін туындылардың ең жоғарғы реті **теңдеудің реті** деп аталады.

Егер (9.1) дифференциалдық теңдеуді ең жоғарғы туындысы арқылы шешіп,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

түрінде жазсақ, ол **қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Егер дифференциалдық теңдеудегі ізделінетін $y = y(x)$ функция тек қана бір айнымалыға тәуелді болса, онда ол **жәй дифференциалдық теңдеу**, ал бірнеше айнымалылардан тәуелді болса, онда **дербес туындылы дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Дифференциялдық теңдеуді қанағаттандыратын кез-келген функция осы теңдеудің **шешімі** немесе **интегралы** деп аталады.

Ерікті тұрақтылардың саны теңдеудің ретіне тең болатын дифференциялдық теңдеудің шешімі (егер ол бар болса) берілген дифференциялдық теңдеудің **жалпы шешімі** деп аталады.

Мысалы, $y''' + 4y'' + 5y = 0$ - үшінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу, $x^2 y' + 4xy = y^2$ - бірінші ретті, $x^2 y^{(5)} + yy''' = 2$ - бесінші ретті; ал $y \cdot z' = 4x \cdot z'_y$ - бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу болып табылады.

Дербес шешім бір айнымалы функция болғандықтан, оның графигі дифференциялдық теңдеудің **интегралдық қисығы** деп аталады. Жалпы шешімге барлық интегралдық қисықтардың жалпы жиыны сәйкес келеді. Ол жалпы дифференциялдық теңдеудің **интегралдық қисықтар жиынтығы** деп аталады. Ал дифференциалдық теңдеудің шешімін анықтау жолы, осы теңдеуді **интегралдау** деп аталады.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

түріндегі теңдеу **бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

$$y' = f(x, y) \qquad (4)$$

түріндегі теңдеу **бірінші ретті туындысы бойынша анықталған қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Бірінші ретті туындысы бойынша анықталған қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеудің дифференциалдық түрде жазылуы:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

мұндағы $P(x, y)$ және $Q(x, y)$ анықталған берілген функциялар.

Дифференциалдық теңдеулерге мысалдар келтірейік:

$$y' = xe^y, \quad y' = \frac{y \ln x}{x}, \quad y' = x + y, \quad xdx + ydy = 0.$$

Анықтама. Бірінші ретті жәй дифференциалдық теңдеудің **шешімі** деп,

1) (a, b) аралығында үзіліссіз диффренциалданатын $y = \varphi(x)$ функциясы түрінде;

2) $\forall x \in (a, b)$ үшін $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ нүктесі F функциясының анықталу аймағы болатын $E \subset R^3$ жиынында жататын;

3) $(a, b) \ni \forall x$ үшін $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ тепе-теңдігі орындалатын, (a, b) аралығында анықталған $y = \varphi(x)$ функцияны айтады.

Көбінесе «**шешім** деп, (4) теңдеуді қанағаттандыратын, яғни тепе-теңдікке айналдыратын функцияны айтамыз» дей береді.

Ал, шешімдерінің ішінен тек біреуін таңдап алу үшін қосымша шарттар қою арқылы, Коши есебін шешеміз: $(x_0, y_0) \in D, \quad y(x_0) = y_0$ - бастапқы шарт немесе Коши шарты. (9.4) дифференциалдық теңдеудің бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі **дербес шешім**, ал есеп – **Коши есебі** деп аталады.

(4) бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің **жалпы шешімі** деп,

1) кез келген C демеуші мәндері үшін $y = \varphi(x, C)$ функциясы (4) теңдеудің шешімі болып табылатын;

2) кез келген $y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D$ бастапқы шарт үшін, C_0 демеуші тауып, $y = \varphi(x, C_0)$ функциясы $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ шартын қанағаттандыратындай C демеушісінен тәуелді $y = \varphi(x, C)$ біріне-бірі ұқсас функциялар жиынтығын айтады.

Ал, бұл теңдеулердің **дербес шешімі** деп, C демеушісінің белгілі бір мәніне сәйкес жалпы шешімнен бөлініп алынған шешімді айтамыз. Ендеше, дербес шешім Коши есебінің шешімі болып табылады.

Теорема (Коши есебі шешімінің бар және оның жалғыздығы жөнінде). Егер $f(x, y)$ функциясы D облысында анықталған, үзіліссіз және оның дербес туындысы $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ болса, онда x_0 нүктесінің δ - маңайы, яғни $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ табылып, осы маңайда (4) дифференциалдық теңдеудің бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі бар және ол жалғыз болады.

(4) бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің әрбір нүктесіндегі шешімнің жалғыздығы бұзылатын, яғни (x_0, y_0) нүктесі арқылы басқа да (4) теңдеуінің шешімдері басып өтетін болса, онда ол **ерекше шешім** деп аталады.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу.

а) **Айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеулер**. $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы $f(x, y)$ функциясы біреуі *y*– тен тәуелсіз, екіншісі *x* –тен тәуелсіз екі функцияның көбейтіндісінен, яғни $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ тұрса, онда

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (5)$$

теңдеу **айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot$$

Бір жағында *x,* екіншісінде *y* болатындай теңдеуді екі бөлікке бөлеміз: $\dfrac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) \cdot dx, \quad f_2(y) \neq 0 \cdot$ Сонда теңдеудің екі бөлігі екі функцияның дифференциалын береді, ендеше екі жағын жеке интегралдаймыз:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C \cdot$$

Бұл бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі (интегралы).

б) **Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.**

$$M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy = 0. \qquad (6)$$

теңдеу **айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Онда $N_1(y) \neq 0, \quad M_2(x) \neq 0$ деп болжап, осы теңдеуді $N_1(y) \cdot M_2(x)$ - ке бөліп, айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0 \cdot$$

Теңдеудің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

в) **Біртекті дифференциалдық теңдеулер.**

$f(x,y)$ функциясы берілсін. Егер кез келген $t \in R$ нақты саны үшін

$$f(tx,ty) = t^a f(x,y)$$

теңдігі орындалатын болса, онда $f(x,y)$ функциясы α **- шы ретті біртекті функция** деп аталады.

Егер $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары бірдей ретті біртекті функциялар болса, онда

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (7)$$

біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Анықтама. $y' = f(x,y)$ түріндегі теңдеудің оң жағындағы $f(x,y)$ функциясы нөлдік ретті біртекті функция болса, онда теңдеу **бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Біртекті дифференциалдық теңдеуді шешу әдісі.

$P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары α - шы ретті біртекті функциялар болса, онда берілген теңдеудің екі жағын да x^α шамасына бөлу арқылы мына түрдегі теңдеуді аламыз:

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + Q_1\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \cdot$$

Осы алынған теңдікке $\frac{y}{x} = u, \quad u = u(x) \Rightarrow y = ux, \quad dy = udx + xdu$ ауыстыруын қолдансақ, онда теңдеу айнымалысы ажыратылатын теңдеуге келтіріледі. Ары қарай айнымалыларын ажыратып, содан соң интегралдап, $u(x)$ -ті тауып, $y = ux$ болғандықтан, y пен x арасындағы тәуелділікті табамыз. Бұл іздеп отырған біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады.