11- дәріс. Қисықсызықты және беттік интегралдар

Бірінші түрдегі қисықсызықты интеграл $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(a \le t \le b)$ $-$ үзіліссіз дифференциалданатын жай қисығы беріліп, $\Gamma(\gamma) = \{(x(t), y(t)) : a \le t \le b\}$ жиынында $f(x, y)$ нақты мәнді функциясы анықталысын. Әр $a \le t \le b$ үшін γ қисығының $\gamma(a)$ мен $\gamma(t)$ нүтелері арасындағы бөлігінің ұзындығы $s(t) = \int\limits_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau$ болады.

$[a, b]$ сегментінің $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ бөлшектеуі берілсін. Онда $s_i = s(t_i)$ үшін $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ айырымы γ қисығының $\gamma(t_{i-1})$ және $\gamma(t_i)$ нүтелерін жалғайтын бөлігінің ұзындығы болады. Осы дайындықтан кейін, мақсатымыз болатын анықтамаға тікелей көше аламыз. Егерде қайсыбір I саны мен әр ε оң саны үшін $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b,\ \Delta t < \delta,\ t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$ $(i = 1, ...N)$ болған сайын

$\left| \sum f(x(\xi_i), y(\xi_i))\Delta s_i - I \right| < \varepsilon$ болатындай δ оң саны табылса, онда f функциясы γ қисығында интегралданады, ал I санын оның интегралы дейді. Оны келесідей бегілеп

$I = \int\limits_\gamma f(x, y)ds \equiv \int\limits_\gamma fds$ бірінші түрдегі қисықсызықты интеграл деп атайды.

Бірінші түрдегі қисықсызықты интеграл бар болуының бір жеткілікті шарты.

Теорема. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(a \le t \le b)$ жай қисығы беріліп, $x(t)$ және $y(t)$ функциялары $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз дифференциалданып және $f(x, y)$ функциясы $\Gamma(\gamma)$ жиынында анықталдып, сол жиын бойынша сонда үзіліссіз болсын. Онда (3) интегралы бар болып,

$$\int\limits_\gamma fds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \qquad (4)$$

теңдігі орындалады.

Бір және көп байланысты облыстар

Егер Ω облысы беріліп, сонда жатқан әр γ тұйық жай қисығымен шектелген Ω_y облысы Ω жиынында толық жатса, онда Ω бір байланысты облыс деп аталады. Мәселен, әр ашық дөңгелек – бір байланысты облыс.

Бір байланысты емес, яғни қайсыбір $\gamma \in \Omega$ жай контуры үшін Ω_y жиынында Ω облысында жатпайтын нүктесі табылса, онда Ω жиынын көп байланысты облыс деп атайды.

Жазықтықтағы облыстық ориентациясы. Жазықтықты тікбұрышты координаталар жүйесі арқылы екі түрде арифметикаландыруға болады. Олар мынадай мағынада бір-бірінен мүлдем өзгеше: жазықтық бойында жылжытып, бұл екі жүйенің *x* пен *y* өстерінің аттас оң бағыттарын беттестіруге болмайды.

Бұл екі жүйеде центрі *O* нүктесінде болатын екі шеңбер сызып, сол шеңберде *оң бағыт* деп *x* осінің оң бағытынан *y* өсінің оң бағытына ең қысқа жолмен жететін бағытты атайық.

Бірінші түрдегі беттік интеграл екі еселі интегралдың жалпылауы болады. Жазықтықта Жордан бойынша өлшенетін тұйық Ω жиыны беріліп,

$\overline{\Omega} \subset E.$ ашық облысында анықталған және үзіліссіз дифференциалданатын

$E : \tau(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \to R^3,$

Функциясы беріліп, $\overline{\Omega} \leftrightarrow \tau(\overline{\Omega})$ сәйкестігі өзара бірмәнді болсын.

$S = \tau(\overline{\Omega})$ бетінде F(x,y,z) сандық функциясы анықталып, S жиынында S бойынша үзіліссіз болсын.

Егерде қайсыбір I нақты саны мен кез келген ε>0 саны үшін Ω жиынының Жордан бойынша өлшенетін тұйық Ω_i облыстары бойынша анықталған

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{i=1}^{N}\overline{\Omega}_i, \Omega_i \cap \Omega_j = \text{Ш}\ (i \neq j), \qquad \max\ \operatorname{diam} \Omega_i < \delta \qquad (2)$$

болатындай кез келген $\{\Omega_i\}^N_{i=1}$ жіктеуі мен кез келген $(u_i, v_i) \in \Omega_i$ нүктелері үшін

$$\left|\sum_{i=1}^{T} F(\tau(u_i, v_i) \cdot \left|S(\overline{\Omega})\right| - I)\right| < \varepsilon,$$

болатындай δ оң саны табылса,яғни $m.e$ (3)

$$\lim_{\max \operatorname{diam} \Omega_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} F(\tau(u_i, v_i)) \cdot \left|S(\overline{\Omega})\right| = I$$

$$i = 1, \dots, N$$

болса, онда I саны F(x,y,z) функциясының $S(\Omega_i)$ беті бойынша алынған интегралы деп аталып,

$$\int\int F(x,y,z)\, dS \qquad (4)$$

символымен белгіленеді. S беті XOY жазықтығында жатқан x (u,v)=u,

y (u ,v)=v, z= (u ,v)≡0 болғандағы $S=\Omega_i$ жиынына айналғанда, (4) интегралының анықтамасы

$$I_1 = \iint_{\overline{\Omega}} F(u,v,0)dudv. \qquad (5)$$

ек еселі Риман интегралының анықтамасына айналады.

Жалпы жағдайға келсек, F пен r функцияларына қойылған шарттар (4) интегралының бар болуын қамтамасыз етіп,

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_{\overline{\Omega}} F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\|\tau_u \times \tau_v\right\| dudv = I_1 \quad (6)$$

теңдігі орындалатын, яғни (4) интегралы оның белгілеуінде F(x,y,z) орнына F(r (u , v))= F(x (u ,v), y (u ,v), z (u ,v))функциясын, ал dS орнына §2-тағы (33) теңдігі бойынша жазылған

$$dS = \| r_u \times r_v \|\ du\, dv \qquad (7)$$

өрнегін қойғанда пайда болатын екі еселі интегралға тең екендігін көрсетейік. Е оң саны берілсін. Онда

$$f(u,v) = \left\|\tau_u \times \tau_v\right\|_{R^3} \qquad (8)$$

функциясы Ω тұйық шенелген жиынында үзіліссіз болғандықтан, бірқалыпты үзіліссіз болады да қайсыбір δ>0 саны үшін

$$\left\|(u,v) - (t,\tau)\right\|_{R^2} < \delta \qquad (9)$$

болған сайын

$$\left\| f(u,v) - f(t,\tau) \right\| < \varepsilon. \qquad (10)$$

болады. (6) теңдігінің оң жағындағы екі еселі I_1 интегралы Жордан бойынша өлшенетін тұйық облыс бойынша үзіліссіз функциялардан құрылған, сол себепті өзі де үзіліссіз болатын функциядан алынған интеграл ретінде бар болып, 6 (§6, XII тарау)-пунктте дәлелденгендей, қайсыбір $\delta_2>0$ саны үшін (1) жіктеуінде $\max \operatorname{diam} \Omega_i < \delta_2$ болған сайын әр $(u_i, v_i) \in \Omega_i$ үшін i=1, ... , N

Мысал. z= ŕ (x,y) ((x,y)∈ Ω) айқын түрде берілген S беті үшін (6) және (7) бойынша

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_{\Omega} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

Бет ориентациясы. Айқын түрде берілген S бетінің екі жағы бар – жоғарғы және төменгі. Оларды функция арқылы суреттеу үшін сол беттің нормалінің бағытын көрсетсек болғаны, өйткені

$$\vec{n}(x,y,f(x,y)) = \left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)_{(x,y,f(x,y))}$$

бірлік векторы S бетіне (x,y,ŕ (x, y)) нүктесінде (дәлірек айтқанда сол нүктедегі жанама жазықтыққа) перпендикуляр болып, Oz өсінің оң бағытымен сүйір бұрыш құрып, жоғары бағытталған, яғни S беттің жоғарғы жағын көрсетеді. Әрине n векторына қарсы бағытталған -n бірлік нормаль осындай мағынада S бетінің төменгі жағын көрсетеді. Бет жақтарын айыру үшін n бірлік нормалі көрсететін жақты S^+, ал – n көрсететін жақты S^- деп белгілейік.

Осы екі үзіліссіз нормальдың әрқайсысы S бетінің *ориентациясы* деп аталады.

Анықтық үшін n нормалі анықтайтын жақты S бетінің оң жағы S^+, ал -n анықтайтын жағын S^- делік. Бет ориентациясы оның r (u,v) бейнеленуі мен қатар кеңістіктегі декарттық жүйе бағытталуына векторлық көбейтінді арқылы тәуелді екендігін атап өтейік. Әр бет ориентациялана бермейді. Сол анықтамадағы тіктөртбұрыштың ортаңғы сызығын Мебиус бетінің OO_1 ортаңғы сызығы деп аталық.

Егерде Мебиус бетінің ортаңғы сызығында бір нүкте мен сондағы екі нормалдың бірін белгілеп алып, сол сызық бойымен бір айналып шығып, бастапқы нүктеге қайтып оралғанда, нормаль өз бағытын қарама-қарсы бағытқа алмастырып, сол нүктеде үзілісті болатынын көреміз.Демек, қабылданған анықтамаға сай, Мебиус беті – ориентацияланбайтын бет. Мебиус беті мынадай мағынада біржақты: оны қалам ұшын көтерместен толық бояп шығуға болады. Осыған орай, ориентацияланатын бетті екі жақты бет деп те атайды.

Екінші түрдегі беттік интеграл екі еселі Риман интегралының тағы бір түрлендіруі деп елестетуге болады. Сонымен, үзіліссіз дифференциалданатын және әр $(u,v)\in\overline{\Omega}$ үшін r_u x $r_v = 0$ болатындай r (u,v) екі жақты беті беріліп, Ω↔r (Ω) түріндегі өзара бірмәндік сәйкесте болатын кеңістіктегі r (Ω) жиынында үзіліссіз F(x,y,z) сандық функциясы берілсін.

S= r (Ω) бетінде n және – n ориентацияларына сай

$$\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)dxdy \overset{def}{=} \iint\limits_{S} \mathrm{F}(x,y,z)\cos(\vec{n}\,^\wedge,\vec{k})ds, \quad (14)$$

$$\iint\limits_{S^-} F(x,y,z)dxdy \overset{def}{=} \iint\limits_{S} \mathrm{F}(x,y,z)\cos(-\vec{n}\,^\wedge,\vec{k})ds. \quad (15)$$

Екі интегралын анықталық. Бұл анықтамалар бірінші түрдегі беттік интегралдың анықтамасында dS орнына оның XOY жазықтығына проекциясы болатын dxdy алынып және сол алмастыру

Екінші түрдегі интеграл мәні S бетінің ориентациясына тәуелді:

$$\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)dxdy \overset{(14)}{=} -\iint\limits_{S} \mathrm{F}(x,y,z)\cos(-\vec{n}\,^\wedge\vec{k})ds \overset{(15)}{=} \iint\limits_{S^-} \mathrm{F}(x,y,z)dx\mathrm{dy}.$$

Сөйтіп, екінші түрдегі беттік интегралда беттің бір жағынан екінші жағына өткенде оның таңбасын қарама-қарсы таңбаға ауыстыру керек. Дәл айтқанда S^+ жағынан S^- жағына (яғни n орнына -n алғанда) не S^- жағынан S^+ жағына (яғни -n орнына n алғанда) өткенде, интеграл мәні –1 санына көбейту керек.

Анықтама бойынша екі вектор тең болуы үшін олардың сәйкес координаталары тең, сондай-ақ векторды санға көбейту деген оның әр координатасын сол санға көбейту болғандықтан, (17) бойынша

$$\cos(\vec{n}\,^\wedge\vec{n}) = \frac{1}{\left\|\bar{\tau}_u\times\bar{\tau}_v\right\|}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{EG'-F^2}}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Бұған қоса (7) бойынша

$$ds = \left\|\tau_u\times\tau_v\right\|dudv = \sqrt{EG'-F^2}\,dudv, \quad (18)$$ сол себептен

$$\cos(\vec{n}\,^\wedge\vec{k})\mathrm{ds} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv. \qquad (19)$$

Сондықтан ((16) бойынша S^+ бетімен шектелуге болады)

$$\iint_{S^+} F(x,y,z)dxdy = \iint_{\Omega} \mathrm{F}(\mathrm{x}(\mathrm{u},\mathrm{v}), y(\mathrm{u},\mathrm{v}), \mathrm{z}(\mathrm{u},\mathrm{v})) \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv. \qquad (20)$$

Егерде S беті z=ŕ(x,y) функциясы арқылы айқын түрде берілген болса, онда x=u, y=v,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$ болып, (20) бойынша

$$\iint_{S^+} F(x,y,z)dxdy = \iint_{\Omega} \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}))dxdy. \qquad (21)$$

$$\iint_{S^+} F(x,y,z)dydz \overset{def}{=} \iint_{S} \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\cos(\vec{n}\,\hat{}\,\vec{i})ds = \iint_{\Omega} F(\tau(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v)dudv, \quad (22)$$

$$\iint_{S^+} F(x,y,z)dzdx \overset{def}{=} \iint_{S} \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\cos(\vec{n}\,\hat{}\,\vec{j})ds = \iint_{\Omega} F(\tau(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v)dudv.$$

Гаусс-Остроградский формуласы.

Теорема 4. ХОу жазықтығында бір байланысты G облысы беріліп, сонда үзіліссіз дифференциалданатын $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$) функциялары берілсін. Онда

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

теңдігі орынды.(беттік интеграл Ω бетінің, G облысын шенейтін сырты бойынша алынады).

Формула Стокса

Теорема 5. Бағытталған Ω беті L сызығымен шенелсін және ол G облысына тиісті болсын. Ол облста $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ функцияларының үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Онда

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

теңдігі орынды. Мұдағы L оң бағытта.