

10- дәріс. Еселі интегралдар

1-теорема. Егер f функциясы A тіктөртбұрышында интегралданса, онда әрбір c нақты саны $c \cdot f$ функциясы да сол жиында интегралданады да

$$\iint_A c f(x, y) dx dy = c \iint_A f(x, y) dx dy \quad (1)$$

теңдігі орындалады.

2-теорема. Егерде f_1 және f_2 функциялары A тіктөртбұрышында интегралданса, онда сол жиынында олардың қосындысы да интегралданып,

$$\iint_A [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_A f_1(x, y) dx dy + \iint_A f_2(x, y) dx dy \quad (2)$$

теңдігі орындалады.

3-теорема. A тіктөртбұрышында интегралданатын функциялары мен нақты сандары берілсін. Онда функциясы да жиынында интегралданып, $\iint_A f dx dy \leq \iint_A f_1 dx dy + \iint_A f_2 dx dy$

теңдігі орындалады.

4-теорема. A тіктөртбұрышы мен оның бөлшектеуі берілсін. f функциясы A жиынында анықталған және шенелген болсын. Онда f функциясы A тіктөртбұрышында Риман бойынша интегралдануы үшін f функциясы әр A_{ij} тіктөртбұрышында интегралдануы қажетті және жеткілікті.

Теңсіздікті интегралдау. Орташа мән туралы теоремалар.

5-теорема. Егерде A тіктөртбұрышында f_1 , және f_2 функциялары интегралданып, әр $(x, y) \in A$ үшін $f_1(x, y) \geq f_2(x, y)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\iint_A f_1 dx dy \geq \iint_A f_2 dx dy$$

болады. Соның ішінде, егер A тіктөртбұрышында f функциясы интегралданып, әр $(x, y) \in A$ үшін $f(x, y) \geq 0$ болса, онда

$$\iint_A f dx dy \geq 0$$

6-теорема. $a < b$ және $c < d$ сандары беріліп, $A = [a, b] \times [c, d]$, тіктөртбұрышында f функциясы интегралдансын.

Егерде қайсыбір m және M сандары мен әрбір $(x, y) \in A$ үшін $m \leq f(x, y) \leq M$ болса, онда

$$\iint_A f dx dy = \mu \nu(A)$$

теңдігі орындалатындай $\mu \in [m, M]$ саны табылады.

Егерде f функциясы A жиынында үзіліссіз болса, онда μ саны ретінде функцияның мәнін алуға болады, яғни қайсыбір $(\xi, \eta) \in A$ үшін

$$\iint_A f dx dy = f(\xi, \eta) \nu(A)$$

7-теорема. Егерде f функциясы A тіктөртбұрышында интегралданса, онда $|f|$ функциясы A жиынында интегралданып, келесі теңсіздігі орындалады

$$\left| \iint_A f dx dy \right| \leq \iint_A |f| dx dy$$

Екі еселі интегралды есептеу. Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасына сүйене отырып, болашақ формуланың түрін болжап көрелік. Сөйтіп, $f(x, y)$ функциясы $A: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ тіктөртбұрышында үзіліссіз және теріс емес делік. Онда интегралы бар және оның мәні дененің көлеміне тең.

$[a, b]$ сегментінің $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b\}$ бөлшектеуіне A тіктөртбұрышының $A = [a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^k [x_{i-1}, x_i] \times [c, d]$ жіктеуін сәйкес қойып, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша келесі теңдікке келеміз.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_c^d f(x, y) dx dy$$