9- дәріс. Еселі интегралдар

Тіктөртбұрыш. $a \le b$ және $c \le d$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық $a,\, b,\, c$ *және* d нақты сандары берілген болсын. Тіктөртбұрыш деп $a \le x \le b$ *және* $c \le y \le d$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x және y сандарына сәйкес $(x, y) \in R^2$ элементтерінен құрылған жиын аталады. Оны A әрпімен белгілейік . Сөйтіп , A *жиынын* $[a,b] \times [c,d]$ сегменттер тіке көбейтіндісіне тең яғни

$$A \equiv [a,b] \times [c,d] \overset{\partial ef}{=} \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}. \qquad (1)$$

(1) белгілеулерімен қатар A тіктөрбұрышын ықшам түрде "$a \le x \le b,\ c \le y \le d$ *тіктортбурыш*" деп те атаймыз.

$a = b,\ c = d$ болғанда A жиыны бір ғана (a, c) нүктесінен тұрады, $a = b,\ c < d$ болғанда $\{\, (x,y) : x = a, c \le y \le d \,\}$ ал $a < b,\ c = d$ болғанда $\{\, (x,y) : a \le x \le b,\ y = c \,\}$ кесінділері болады. $a < b,\ c < d$ жағдайында $A = [a,b] \times [c,d]$ тұйық параллепипедіднің ішкі нүктелер жинын, әрине $(a,b) \times (c,d)$ ашық параллепипедінің дәл өзі болады. Ал барлық шекаралық нүктелерін келесі кесінділерден құрылады.

$$\partial A = \{(x,y) : x = a, c \le y \le d\} \cup \{(x,y) : a \le x \le b, y = c\} \cup \{(x,y) : x = b, c \le y \le d\} \cup (x,y) : a \le x$$

Қалған жағдайларда $A = \partial A$ жиындар теңдігі орындалып , A жиынының бірде-бір ішкі нүктесі болмай , әр нүктесі шекаралық нүкте болады.

Тіктөртбұрыштың бөлшектеуі. P_1 және P_2 екі бөлшектеу (реттлген қос бөлшектеу) $A \equiv [a,b] \times [c,d]$ тіктөртбұрышының бөлшектеуі деп аталады. Да, біз оны $P = (P_1\ , P_2)$ арқылы белгілейміз . Сөйтіп $(P_1\ , P_2)$ бөлшектеуі $[a,b]$ сегментінен алынған $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_k = b$ және $[c,d]$ сегметінен алынған $c = y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_l = d$ ақырлы жиындардан құрылған. $(P_1\ , P_2)$ бөлшектеуі $A \equiv [a,b] \times [c,d]$ тіктөртбұрышын i *мен* j *сәйкес* $1,2,\ldots,k$ *және* $1,2,\ldots,l$ мәндерін қабылдаған кезде $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_j]$ түріндегі $k \cdot l$ тіктөртбұрыштарына бөледі. Ал бұл $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_j]$ тіктөртбұрыштардың әрқайсысын $(P_1\ , P_2)$ бөлшектеуінің тіктөртбұрышы деп атайды.

Тіктөртбұрыштың ауданы деп оның қабырғаларының (оны құрайтын сегменттердің) ұзындықтарының көбейтіндісіне аталады. Сол себепті $A \equiv [a,b] \times [c,d]$ тіктөртбұрышының ауданын $v(A)$ деп белгілесек , онда $v(A) = (b-c)(d-c)$ болады., өйткені $[\alpha, \beta]$ сегментінің ұзындығы анықтама бойынша $\beta - \alpha$ санына тең. Мынадай белгілеулер енгізейік

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

онда

$$v(A_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j \qquad (2)$$

және

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} v(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \Delta y_j = \left(\sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{l} \Delta y_j \right) = (b-a)(d-c)$$

$$v(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} v(A_{ij}) = \sum_{i:\Delta x_i > 0} \sum_{j:\Delta y_j > 0} v(A_{ij}) + \sum_{i:\Delta x_i > 0} \sum_{j=1}^{l} v(A_{ij}) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j:\Delta y_j > 0} v(A_{ij}) + \sum_{i:\Delta x_i = 0} \sum_{j:\Delta y_j = 0} v(A_{ij}) = \sum_{i:\Delta x_i > 0} \sum_{j:\Delta y_j > 0} v(A_{ij}) \quad (4)$$

A тіктөртбұрышының P бөлшектеуін құрайтын P_1 және P_2 бөлшектеулерінің диаметрлерінің үлкені P бөлшектеуінің диаметрі деп аталадыда, $\mu(P) = \mu(P_1\ , P_2)$ арқылы белгіленеді. Сонымен $[a,b]$ және $[c,d]$ сегментерінен бөлшектейтін сегментердің ұзындықтарының ең үлкені P бөлшектеуіннің диаметрі деп аталады.

$$\mu(P)=\mu(P_1\ ,P_2)=\max\{\mu(P_1\ );\ \mu(P_1\ )\}=\{\max_{i=1,\ldots,k}\Delta x_i;\ \max_{j=1,\ldots,l}\Delta y_l\ \}.$$

Әр $\delta>0$ саны үшін диаметрі $\mu(P_1\ ,P_2)<\delta$ болатындай $(P_1\ ,P_2)$ бөлшектеуі , мәселен , былай құрылады.

N оң бүтін санын алып, $[a,b]$және $[c,d]$ сегментерінің дәл N бөлікке бөлейік

$$P_1\ (N): x_i\ =a+\tfrac{b-a}{N}i\quad (i=0,1,\ldots,N),$$
$$P_2\ (N): y_j\ =c+\tfrac{d-c}{N}j\quad (j=0,1,\ldots,N) \qquad (5)$$

Онда $P_N\overset{\partial ef}{=}(P_1(N),P_2(N),)$ бөлшектеуі үшін $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{N},\quad \Delta y_j=\dfrac{d-c}{N},$ болады, демек $\mu(P_1\ (N))=\dfrac{b-a}{N},\ \mu(P_2\ (N))=\dfrac{d-c}{N},$ сол себептен Әрине $N>\dfrac{\max\{b-a;d-c\}}{\delta}$ болғанда (5) бөлшектеуі үшін $\mu(P_N)<\delta$ болады.

Екі еселі Риман интегралының анықтамасы.

$f(x,y)$ функциясы $A\equiv[a,b]\times[c,d]$ тіктөртбұрыштарында анықталған және шенелген болсын.

Барлық мүмкін $U(P_1,P_2;f)$ жоғарғы қосындылардан құрылған сандар жиынының инфимумы жоғарғы интеграл , ал $L(P_1,P_2;f)$ төменгі қосындылардан құрылған сандар жиынының супремумы төменгі интеграл деп аталып, сәйкес $\overline{\iint} f(x,y)dxdy\ \ \text{және} \underline{\iint} f(x,y)dxdy$ түрінде белгіленеді.. сонымен

$$\overline{\iint} f(x,y)dxdy=\inf_{(P_1,P_2)}U(P_1,P_2;f), \qquad (12)$$

$$\underline{\iint} f(x,y)dxdy=\sup_{(P_1,P_2)}L(P_1,P_2;f) \qquad (13)$$

(11) теңсіздігі мен (12) және (13) анықтамалары бойынша

$$mv(A)\le\overline{\iint} f(x,y)dxdy=Mv(A), \qquad mv(A)\le\underline{\iint} f(x,y)dxdy=Mv(A)$$

Сонымен әр шенелген $\boldsymbol{f}$ функциясымен төменгі де, жоғарғы да интегралдары әрқашанда бар және олар нақты сандар.

Төменгі бір айнымалы функция жағдайындағы сияқты

$$\overline{\iint} f(x,y)dxdy\ \ \text{және}\underline{\iint} f(x,y)dxdy$$

болатыны дәлелденеді. Егерде $A\equiv[a,b]\times[c,d]$ тіктөртбұрыштарында анықталған және шенелген

$A\equiv[a,b]\times[c,d]$ тіктөртбұрыштарында шенелген $f(x,y)$ функциясы үшін

$$\overline{\iint} f(x,y)dxdy\ \ \text{және}\underline{\iint} f(x,y)dxdy \qquad (14)$$

теңдігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы А тіктөртбұрышында **Риман бойынша интегралданады** деп, ал жоғарғы және төменгі интегралдардың ортақ мәні $f(x,y)$ функциясы А-дағы интегралы деп аталып,

$$\iint_A f(x,y)dxdy\ \ \text{не}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy \qquad (15)$$

символымен белгіленеді. Бұл белгілеудегі $dxdy$ өрнегі $v(A_{ij})=\Delta x_i\Delta y_j$ көбейтіндісін елестетеді. Осы орайда $dv=dxdy$ деп алып, интегралды

$$\iint_A f(x,y)dv=\iint_A fdv=\int_A fdv$$

ықшам түрінде де белгінеді.

Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы $A \equiv [a,b] \times [c,d]$ тіктөртбұрышында үзіліссіз , мәндерінің бәрі теріс емес болатын $f(x,y)$ функциясы берілсін. Кеңістікте

$$V = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d, 0 \le z \le f(x,y)\} \qquad (18)$$

$f(x,y) = h$ дербес жағдайында бұл дене тік параллепепедке айналады, ал оның көлемі деп қабырғалар ұзындықтарының көбейтіндісі болатын $(b-c)(d-c)h$ саны аталатыны элементар геометриядан белгілі. Бұдан және (17) теңдігінен $f(x,y) = h$ болған жағдайда (18) денесінің көлемі екі еселі (15) Риман интегралы арқылы бейнеленетініін көреміз.

V денесінің көлемі ретінде анықтама бойынша теріс емес

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

саны қабылданады.