

8- дәріс. Фурье қатарлары.

Үзіліссіздік нүктесіндегі Фурье қатарының жинақталуының жеткілікті шарты.

1-теорема. Егерде 2π -периодты $f(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында үзіліссіз болып, x_0 нүктесінде оң жақты және сол жақты ақырлы туындылары (олар өзара беттесе ме, беттеспей ме бәрібір) бар болса, онда сол нүктеде

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$$

яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0, f) = f(x_0) \quad (9)$$

теңдігі орындалады.

Салдар. Егерде 2π -периодты $f(x)$ функциясының $(-\infty, \infty)$ аралығының әр нүктесінде сол жақты және оң жақты ақырлы туындылары (өзара тең бе әлде бірінен бірі өзге ме бәрібір) бар болса, онда сол аралықта оның Фурье қатары оған нүктелі жинақталады, яғни әр $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ нүктесінде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

теңдігі орындалады.

Фурье қатарының үзілісті нүктесіндегі жинақталуының жеткілікті шарты

Фурье қатарының жеке нүктеде жинақталуын зерттегенде мәндерін еркін өзгертуге болмайтын функциялармен шектеледі. Мәселен, $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда үзіліссіздігін жоғалтпай оның мәнін сол нүктеде өзгертуге болмайды: егерде x_0 нүктесіне $f(x)$ мәнін A ($A \neq f(x_0)$), мәніне өзгертсек, онда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0) \neq A, \text{ яғни}$$

өзгертілген функция x_0 нүктесінде үзілісті.

Үзілісті функциялар арасынан үзілісі ең кішкене болатын бірінші түрдегі функциялармен шектелеміз.

Егерде f функциясы x_0 нүктесінде бірінші түрде үзілісті болса, онда оның нақты мәнді оң жақты $f(x_0 + 0)$ және сол жақты $f(x_0 - 0)$ шектері бар болады. Сондықтан мұндай x_0 нүктесінде f функциясымен екі $f(x_0 + 0)$ және $f(x_0 - 0)$ нақты сандары байланысты және өте тығыз байланысты: f функциясының мәндері ақырлы жиында қалай өзгертілсе де ол бұл бір жақты шектердің бар болуына да, мәніне де ешқандай әсер ете алмайды. Осыған лайықтап функцияның бірінші түрдегі үзіліс нүктесінде біржақты туындылар былай анықталады:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} = f'_+(x_0) \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)}{t} = f'_-(x_0) \quad (17)$$

Егерде x_0 нүктесі f функциясының үзіліссіздік нүктесі болса, онда $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ болып, (16) және (17) анықтамалары сәйкес жай оң жақты және жай сол жақты туындылар анықтамаларына айналады.

2-теорема. Егерде 2π -периодты $f(x)$ функциясы ұзындығы 2π болатын сегментте абсолютті интегралданып, x_0 нүктесінде оң және сол жақты ақырлы шектері бар болып, сол нүктеде (16) және (17) біржақты ақырлы туындылары бар болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының Фурье қатары жинақталып,

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0,$$

Яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0, f) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \quad (18)$$

теңдігі орындалады.

3-теорема. 2π -периодты және де $[-\pi, \pi]$ сегментінде бөлік-бөлік үзіліссіз дифференциалданатын әр $f(x)$ функциясының Фурье қатары $(-\infty, +\infty)$ аралығында нүктелі жинақталын, әр $-\infty < x < +\infty$ үшін

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad \text{теңдігі орындалады.}$$

Фурье қатарына жіктеу мысалдары

Тригонометриялық система жұп болатын тұрақты функция мен косинус және тақ болатын синус функцияларынан құрылған болғандықтан, жұп және тақ функциялардың Фурье қатары сәйкес тұрақты функция мен косинустар және синустардан ғана тұрады.

$f(x)$ жұп функция болғанда теріс емес бүтін әр k үшін $g(x) = f(x) \cos kx$ жұп болып, (33) бойынша

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (35)$$

болады да, оң бүтін әр k үшін $g(x) = f(x) \sin kx$ тақ болып, (34) бойынша

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 \quad (36)$$

ал Фурье қатары ықшамдалған $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum a_k(f) \cos kx$ түрінде болады.

Керісінше, $f(x)$ тақ функция болғанда $a_k(f) = 0, b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$ болады.

Енді мысалдардың өздеріне көшейік.

Теорема (Фурье қатарының жалғыздығы туралы теорема). Егерде 2π -периодты үзіліссіз $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының Фурье қатарлары беттессе, онда әр $x \in [-\pi, \pi]$ үшін $f(x) \equiv g(x)$ теңдігі орындалады.

Сөйтіп, Фурье қатары бір ғана үзіліссіз функцияның Фурье қатары бола алады, яғни әр үзіліссіз функцияға бір ғана тригоно-метриялық Фурье қатары оның Фурье қатары болады.