7- дәріс. Функционалдық қатарлар.

Дәрежелік қатарлар. Жинақтылық радиусы

Анықтама. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...,$ (1) қатарды дәрежелік қатар деп атайды, мұндағы $a_0, a_1, ...$–коэффециенттер.

19-теорема (Абель теоремасы). Егер (1)-қатар $x = x_0$ нүктеде жинақты болса, онда $|x| < |x_0|$ барлық нүктелерде абсолют жинақты. Ал егер қатар $x = x_1$ нүктеде жинақсыз болса, онда ол барлық $|x| > |x_1|$ нүктелерде жинақсыз.

Егер (1)-қатар жинақты болатын болса, онда R нақты саны табылып, барлық $|x| < R$ нүктеде қатар жинақты, ал бар $|x| > R$ нүктеде қатар жинақсыз.

Осыдағы R - ді **жинақтылық радиусы** деп атайды.

Ал $x = -R$ және $x = R$ болғанда қатарды жинақтылыққа осы мәндерді қою арқылы тексереміз.

Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын анықтау үшін

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + ... + |a_nx^n| + ...$$

қатарын қарастырайық. Даламбер белгісін қолдансақ онда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1. \qquad |x| < \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \qquad Демек, \qquad R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Осы сияқты, жинақтылық радиусын $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ – **Коши – Адамар** формуласы арқылы анықтауға болады.

20-теорема. (1)-қатар $(-R, R)$ аралығында бірқалыпты жинақты.

1-салдар. $(-R, R)$ жинақтылық интервалында (1)-қатардың қосындысы үзіліссіз.

2-салдар. Егер интегралдау шектері α, β жинақтылық интервалында жатса, онда $[\alpha, \beta]$ аралығында дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Яғни,

$$\int_\alpha^\beta S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\alpha^\beta a_nx^ndx.$$

3-салдар. Жинақтылық радиусы R болатын дәрежелік қатардың қосындысы $S(x)$ болса, онда $(-R, R)$ интервалының әрбір нүктесінде дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады. Яғни,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

Дифференциалдағанда пайда болған қатардың жинақтылық радиусы алғашқы қатардың жинақтылық радиусына тең болады.

Мысалы. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n};$ $\qquad R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\cdot 5^n} \div \dfrac{1}{(n+1)5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)5}{n} = 5.$

$|x-3| < 5, \quad -5 < x-3 < 5, \quad -2 < x < 8.$

$x = -2$ болса, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n\cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ауыспалы таңбалы қатары, Лейбниц белгісі бойынша, жинақты.

$x = 8$ болса, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гормониялық қатар жинақсыз. Демек, $-2 \le x < 8$ мәндерінде қатар жинақты.

Тейлор қатары

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n; \qquad f^{'}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_nx^{n-1}; \qquad f^{''}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\cdot a_nx^{n-2}; \quad \ldots$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot a_nx^{n-k}.$$

Егер $x=0$ болса, онда $f^{(k)}(0)=k!a_k$. $\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (6)$$

Дәрежелік қатар түрінде бейнеленетін функцияны **аналитикалық функция** деп атайды.

Аналитикалық функция ақырсыз рет дифференциялданады. Бірақ кері болмауы мүмкін. Ақырсыз рет дифференциялданатын функция аналитикалық болмауы мүмкін.

$f(x)$ функциясы $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ аралығында анықталған x_0 нүктесінде ақырсыз рет дифференциялданатын болсын. Онда (6)-қатар - $f(x)$-функциясының **Тейлор қатары** болады.

21-теорема. $f(x)$ функциясы $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ аралығында ақырсыз рет дифференциялдансын. Егер қандай да бір

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n, \qquad (7)$$

дәрежелік қатары әрбір $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ үшін $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$ болса, онда бұл дәрежелік қатар $f(x)$-функциясының Тейлор қатары болады.

22-теорема. $f(x)$ функциясы және оның туындылары $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ аралығында шенелген болса, яғни

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \qquad (8)$$

болса, онда осы аралықта

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (9)$$

Дәрежелік қатардың қолданылуы

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}; \qquad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \qquad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!};$$

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu\cdot x+\frac{\mu(\mu-2)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\ldots(-1<x<1).$$

Мысалдар. 1) $1-t+t^2-t^3+\ldots=\frac{1}{1+t}; \quad (-1<x<1)$

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+\ldots\right)dt=\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots\right)\Big|_0^x=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+t)-\ln 1=\ln(1+t).$$

Демек, $\ln(1+t)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$.

2) $\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int\left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots\right)dt.$

$$arctgt\Big|_0^x=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots\right), \qquad (-1\le x\le 1).$$

3) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. $R=1$, $|x|<1$.

$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. $\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{1}{x-1}$, $|q|=|x|<1$.

$\frac{S(x)}{x}=\frac{1}{(x-1)^2}$. $S(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$.