6- дәріс. Функционалдық қатарлар

Функциялық тізбектер мен қатарлар

$f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ функциялар тізбегі берілсін.

Анықтама. Егер $x \in E$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ болса, онда функциялық тізбек **E** ($f(x)$ -ке) **жиынында нүктелі жинақталады** деп атайды.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ – функциялдық қатар.

$f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ функциялар тізбегіне қатысты келесідей сұрақтар туындайды.

1) $f_n(x), \quad n = 1,2,...$ функциялары үзіліссіз болса, онда шегі болатын функция үзіліссіз бола ма?

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x) = \int\limits_a^b S(x)dx$ орындала ма?

3) $f_n(x)$–дифференциялданатын болса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x) = S'(x)$ орындала ма?

Бұлар әр уақытта орындалмайды. Ол үшін белгілі бір шарттардың орындалуы қажет.

Анықтама. $(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\exists k = k(\varepsilon))(\forall n \ge k): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$

Бұл анықтамада әрбір x үшін өзінің k номері табылады. Мұндай жинақтылықты **нүктелі жинақтылық** деп атайды. Оны $f_n(x) \to f(x), \quad f_n(x) \overset{н.}{\to} f(x)$ символдарының бірімен белгілейді.

Барлық $x \in E$ үшін ортақ k табыла ма деген сұрақ туындайды.

Мысалы, 1) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, \quad E = [0,1], \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2} = 0;$

$$0 \le f_n(x) = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n} < \varepsilon, \quad |f_n(x) - 0| = f(x);$$

$n > \dfrac{1}{2\varepsilon}, \quad k = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right], \quad \forall x \in [0,1].$ Табылады.

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, \quad E = [0,1],$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = 0, \quad f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Егер $x = \dfrac{1}{n}, \quad f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2},$ яғни $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ болғанда кез келген x-терге ортақ $k = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ номерлерін көрсете алмаймыз.

Анықтама (бірқалыпты жинақтылық).

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k = k(\varepsilon))(\forall x \in E)(\forall n \ge k): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Бұл анықтамада барлық x үшін ортақ k номері табылады. Осындай жинақтылықты **бірқалыпты жинақтылық деп атайды.** Оны $f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad f_n(x) \overset{б.}{\to} f(x)$ символдарының бірімен белгілейді.

12-теорема. Е жиынында анықталған $f_n(x)$ функциялар тізбегі Е жиынында бірқалыпты жинақты болуы үшін

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k = k(\varepsilon))(\forall x \in E)(\forall n \ge k)(\forall m \ge N): |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақтылығы

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E \qquad (1)$$

қатры берілсін. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ (1)- қатардың дербес қосындылары болсын.

Анықтама. (1)-қатарды Е жиынында **бірқалыпты жинақты** деп атайды, егер $\{S_n(x)\}$ дербес қосындыларының тізбегі Е жиынында $S(x)$-ке бірқалыпты жинақталса.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, $R_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Осыдан $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$.

(1)- қатардың Е жиынында бірқалыпты жинақталуы $R_n(x) \rightrightarrows 0$ эквивалентті.

14-теорема (қажетті шарт). (1)-қатар Е жиынында бірқалыпты жинақты болса, онда $u_n(x) \Rightarrow 0$.

15-теорема (Вейерштрасс белгісі). Е жиынында $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (2), $a_n \geq 0$ қатарлары берілсін. Егер (2)-қатар жинақты болып, Е-ден алынған кез келген x-тер үшін $|u_n(x)| \leq a_n$ болса, онда (1)-қатар Е жиыныда абсолютті және бірқалыпты жинақты болады.

Вейрштрасс теоремасы қатардың бірқалыпты жинақтылығы үшін қажетті емес, жеткілікті.

Ескерту. Бірқалыпты жинақты функциялық қатарды жақшалар қою арқылы Вейертрасс теоремасының шарты орындалатындай қатарға келтіруге болады.

Бірқалыпты жинақты қатарлардың қасиеттері

16-теорема (қатар қосындысының үзіліссіздігі). Егер үзіліссіз $u_n(x)$ функцияларынан құралған $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1)-қатары Е жиынында бірқалыпты жинақты болса, онда $S(x)$ те үзіліссіз болады.

17-теорема (мүшелеп интегралдау). Егер (1)-қатар мүшелері $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болып, қатар осы аралықта бірқалыпты жинақты болса, онда қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Яғни,

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

18-теорема (мүшелеп дифференциялдау). Егер (1)-функциялық қатардың мүшелері $E = [a,b]$ аралығында:

1. Қатар мүшелерінің үзіліссіз туындылары бар;
2. (1)-қатар нүктелі жинақты, яғни $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$–бірқалыпты жинақты болса, онда қатарды мүшелеп дифференциялдауға

болады. Яғни, $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.