5- дәріс. Сандық қатарлар

Айнымалы таңбалы қатарлар.

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

Анықтама. (1)-қатарды **айнымалы таңбалы қатар** деп атайды, егер оның құрамындағы оң және теріс таңбалы мүшелерінің саны ақырсыз болса.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots, \qquad (2)$$

(2)-қатарды **ауыспалы таңбалы** қатар деп атайды. Ауыспалы таңбалы қатар айнымалы таңбалы қатардың дербес жағдайы.

9-теорема (Лейбниц белгісі). (2)-ші қатардың мүшелері келесі шарттарды қанағаттандырсын:

$$u_n \geq u_{n+1} \qquad (\forall n \in N) \qquad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (4)$$

Онда (2)-ші қатар жинақты. Оның қосындысы бірінші мүшесінен аспайды, $S \leq u_1$.

1-ескерту. Егер (3)-шарт белгілі бір номерден бастап орындалғанда да теорема ақиқат.

2-ескерту. Егер ауыспалы таңбалы қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырса, онда қатардың қосындысын оның қандай да бір дербес қосындысымен ауыстырғандағы дәлдікті анықтауға болады.

Мұндай ауыстыруда u_{n+1} мүшеден бастап алынып тасталған қатар мүшелері де ауыспалы таңбалы қатар құрайтын болғандықтан ол қатардың қосындысы абсолют шамасы бойынша бірінші мүшесінің модулінен аспайды, яғни $S_n \leq |u_{n+1}|$.

Абсолютті және шартты жинақтылық

Айнымалы таңбалы (1)-қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрастырылған қатарды қарастырайық

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (5)$$

10-теорема. Егер (5)-қатар жинақты болса, (1)-қатар да жинақты.

Ескерту. 10-теоремаға кері тұжырым дұрыс емес, яғни (1)-қатардың жинақтылығынан (5)- қатардың жинақтылығы шықпайды.

Анықтама. Егер айнымалы таңбалы қатар мүшелерінің абсолютті шамаларынан құралған (5)- қатар жинақты болса, онда айнымалы таңбалы (1)-қатарды **абсолютті жинақты** қатар деп атайды.

Анықтама. Егер айнымалы таңбалы (1)-қатар жинақты болып, ал оның мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған (5)- қатар жинақсыз болса, онда айнымалы таңбалы қатарды **шартты жинақты** деп атайды.

11-теорема. 1) Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, (1) абсолютті жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ қатары да абсолютті жинақты болады.

2) Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатарлары абсолютті жинақты болса, онда $\sum_{k=n}^{n+p} (u_k + v_k)$ қатары да абсолютті жинақты болады.