3- дәріс. Көп айнымалының функциясы

Айқындалмаған түрде берілген функцияны дифференциалдау

Егер бір айнымал функцияны қарастырсақ, у-пен аргумент х-тің арасындағы тәуелділікті әртүрлі әдістермен беруге болады. Егер у-ті айнымал х арқылы өрнектесек, яғни

$$y = f(x) \quad (6)$$

түрінде жазсақ, онда функция айқындалған түрде берілген дейміз. Көптеген жағдайларда функцияны (1)-түрде өрнектей алмаймыз.

Егер у-пен аргумент х-тің арасындағы байланыс

$$F(x,y) = 0 \qquad (7)$$

теңдеуі түрінде берілсе және оның ең болмағанда бір шешімі бар болса, онда функция **айқындалмаған** түрде берілген деп аталады.

Мысалы, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ функциясының графигі радиусы R- ге тең жоғарғы жарты шеңбер болып табылады. Осы функцияны мына айқын емес $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, түрде жазуға болады. Ал, бұл функция сонымен қатар $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ функциясын анықтайды.

Ескерту. Кез келген айқындалған түрде берілген функцияны айқындалмаған түрде жазуға болады. Керісінше, айтылған тұжырым дұрыс болмайды. Мысалы, $e^{x+y} + \sin xy = 1$ функциялық теңдеуінде 1-ді теңдеудің сол жағына көшірсек**,**

$$F(x,y) = e^{x+y} + \sin xy - 1$$

функциясы 1–ші теореманың шарттарын қанағаттандырады, яғни $F(x,y)$ функциясы және оның дербес туындылары айнымалдардың кез келген мәндерінде үзіліссіз болады. $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ болғандықтан, берілген $e^{x+y} + \sin xy - 1 = 0$ теңдеуі бір мәнді айқындалмаған функцияны анықтайды.

Берілген функцияны айқындалған түрде жаза алмаймыз.

5-теорема $F(x,y)$ функциясы

1) (x_0, y_0) нүктесінің маңайында үзіліссіз және F'_x, F'_y үзіліссіз дербес туындылары бар,

2) $F(x_0, y_0) = 0$,

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ болса, онда $F(x,y) = 0$ теңдеуі x_0 нүктесінің маңайында дифференциалданатын $y = y(x)$ функциясын анықтайды және

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad (8)$$

6-теорема. $u = F(x,y,z)$ функциясы

1) (x_0, y_0, z_0) нүктесінің маңайында үзіліссіз және оның F'_x, F'_y, F'_z үзіліссіз дербес туындылары бар болсын,

2) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,

3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ болса, онда

$F(x,y,z) = 0$ теңдеуі (x_0, y_0) нүктесінің маңайында дифференциалданатын $z = z(x,y)$ функциясын анықтайды және оның дербес туындылары келесідей анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль.

Бетке M нүктесінде жүргізілген **жанама жазықтық** деп M нүктесі арқылы жүргізілген беттегі барлық қисықтардың жанамаларынан тұратын жазықтықты атайды.

Бетке M нүктесінде жүргізілген **нормаль** деп осы нүктедегі жанама жазықтыққа M нүктесі арқылы өтетін перпендикуляр түзуді атайды.

1) Егер бет $F(x,y,z)=0$ теңдеумен берілсе, онда бетке $M(x_0;y_0;z_0)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуі:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0)=0 ,$$

бетке осы нүктеде жүргізілген нормальдің теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M} .$$

2) Егер бет теңдеуі $z=f(x,y)$ айқын түрде берілсе, онда M нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$(z-z_0)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y-y_0),$$

нормаль теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{-1} .$$

Нөлге тең болу, мысалы $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$, жанама жазықтық Ox осіне параллель, ал нормаль $x=x_0$ жазықтығында жатат андығын білдіреді.

Бірнеше айнымалы функцияның экстремумы

Айталық, $z=f(x,y)$ қос анымалы функциясы **G** облысында берілсін, ол (x_0,y_0) - осы облыстың ішкі нүктесі болсын.

Анықтама. f сандық функциясы $E\subset R^n$ жиынында анықталсын. Егер, біріншіден, a нүктесі E жиынының ішкі нүктесі болса, екіншіден, $V_b(a)\subset E$ кірістіруі орындалатындай қайсыбір δ оң саны мен әрбір $x\in V_b(a)$ үшін $f(x)\le f(a)\ \left(f(x)\ge f(a)\right)$ теңсіздігі орындалса, онда a нүктесін $f(x)$ *функциясы локальді максимум (локальді минимум)мәнін қабылдайтын нүкте,* не қысқаша a - *локальді максимум (локальді минимум) нүктесі* деп атайды.

Егер $f(x,y)$ функциясы үшін (x_0,y_0) нүктесінің маңайының барлық нүктесінде

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0), \quad (f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$$

теңсіздігі орындалатын болса, онда $f(x,y)$ функциясы (x_0,y_0) нүктесінде максимумға (минимумға) ие болады деп атаймыз.

Максимум және минимум ұғымдары нүктелік (локальдық) ұғымдар .

Локальді максимум мен локальді минимум *локальді экстремум* деп аталады.

8-теорема (экстремумның қажетті шарты)

$z=f(x,y)$ функциясы үшін (x_0,y_0) эксремум нүктесі болсын.

Егер, сонымен қатар, $f'_x(x_0,y_0)$ және $f'_y(x_0,y_0)$ бар және ақырлы болса, онда

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

Салдар. Көп айнымал функциялардың экстремумдары әр аргумент бойынша алынған дербес туындылары бір кезде нөлге айналатын нүктелерде «(ғана емес, сонымен қатар,

1) бірінші ретті дербес туындыларының ең кемінде біреуі ақырсыздыққа айналатын нүктелерде

2) бірінші ретті дербес туындыларының ең кемінде біреуі анықталмаған нүктелерде болуы мүмкін.

Егер M_0 нүктесінде f'_x, f'_y нольге тең болса, не анықталмаса, онда M_0 нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының күдікті (*кризистік*) нүктесі деп аталады.

Кез-келген кризистік нүктенің экстремум нүктесі болуы шарт емес.

Экстремумның бар болуының жеткілікті шарттары

9-теорема. Екі айнымалылы сандық $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің қайсыбір δ_0–маңайында анықталып, сол маңайда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

дербес туындылары бар және үзіліссіз болып, сол нүктенің өзінде локальді экстремумның қажетті шарты орындалсын: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \qquad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \qquad C = f''_{yy}(x_0, y_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Онда:

1) егер $\Delta > 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ локальді экстремум нүктесі болып, $A > 0$ болғанда локальді қатаң минимум, $A < 0$ болған да локальді қатаң максимум нүктесі болады;

2) егер $\Delta < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі локальді экстремум нүктесі емес;

3) егер $\Delta = 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі туралы нақтылы ештеңе айтуға болмайды: ол локальді экстремум нүктесі болуы да, болмауы да мүмкін.