4- дәріс. Сандық қатарлар

Мектеп курсында ақырлы қосындылар қарастырылады. Жоғары математика курсында қосындылар саны ақырсыз болған жағдайлар да қарастырылады. Саны ақырсыз қосындыларды **қатарлар** деп атайды. Олар функцияның мәнін белгілі бір дәлдікпен жуықтап есептеуде, интегралдың мәнін, дифференциялдық теңдеулердің шешімдерін және тағы басқа да жуықтап есептеулерде қолданылады. Қосылғыштар саны ақырлы болған жағдайдағы қасиеттер ақырсыз қосылғыштар жавғдайында орындалмауы мүмкін. Қатарлар, яғни шексіз қосындылар теориясының негізгі тақырыптары келесідей:

1. Шексіз қосылғыштардың қосындысын анықтау;
2. Берілген қатарлардың қосындысының бар не жоқтығын анықтайтын белгілерді анықтау;
3. Саны ақырлы қосылғыштарға қолданылатын амалдарды ақырсыз қосындылар үшін қарастырудың мүмкін жағдаларын зерттеу;
4. Берілген функцияның қарапайым қатар түрінде өрнектеу формулаларын анықтау;
5. Нақты сандармен қатар комплекс сандардан тұратын қатарларды зерттеу.

Сандық қатар және оның жинақталуы. $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ сандар тізбегі берілсін.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

символын *сандық қатар* деп атайды. Мұндағы u_n нақты санын (1) қатарының *n-ші мүшесі* не *жалпы мүшесі* деп, ал $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, ..., $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, ... теңдігі бойынша анықталған S_n сандарын сол қатардың *n-ші дербес қосындылары* деп атайды.

Егер осы $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегінің $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ нақты мәнді шегі бар болса, онда (1) қатары *жинақталады,* S санын (1) қатарының *қосындысы* дейді де, $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ деп жазады. Бұл жағдайда «(1) қатары S санына *жинақталады*» деп те атайды.

Қалған жағдайлардың әрқасысында, яғни $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегінің $+\infty$, $-\infty$ не ∞ ақырсыз шектері бар не ешқандай да шегі болмағанда, (1) қатары *жинақталмайды*, не **жинақсыз** дейді.

Сандық қатарлардың кейбір қасиеттері

1-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (1) және $\sum_{n=1}^{\infty} cU_n$ (2) қатарын қарастырайық, мұндағы c –нақты сан.

Егер (1) жинақты болса, онда (2) де жинақты, ал (1) жинақсыз болса, онда (2) де жинақсыз.

2-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (1) және $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ (3) қатарлары берілсін. Онда

а) (1), (3) – жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n)$ (4) – жинақты;

б) Егер берілген екі қатардың біреуі жинақсыз болса, онда олардың қосындысы да жинақсыз;

в) Егер (1) және (3) қатарлар жинақсыз болса, онда (4)-қатар жинақты да жинақсыз да болуы мүмкін.

3-теорема. Егер

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

қатар жинақты болса, онда

$$u_n + u_{n+1} + \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \qquad (5)$$

қатар да жинақты және керісінше, егер (5) қатар жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты.

Басқаша айтқанда, саны ақырлы мүшесін алып тастағаннан, не қосқаннан қатар жинақтылығы өзгермейді.

Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуының критерийі

Теріс емес мүшелі, яғни барлық n үшін $a_n \geq 0$ болатын

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

қатары жинақты болуы үшін оның дербес қосындыларының жоғарыдан шенелуі қажетті де жеткілікті.

Салыстыру белгілері

4-теорема. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) қатарлары мүшелері $0 \leq u_n \leq v_n \quad u \quad \forall n \geq n_0 \in N$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақты;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатары да жинақсыз;

3) Егер (1) және (2) қатарлар үшін $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (l \neq 0)$ онда екі қатар да жинақты, не екеуі де жинақсыз.

5-теорема (Даламбер белгісі). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ болсын. Егер

а) $\rho < 1$ болса, қатар жинақты; ә) $\rho > 1$ болса, жинақсыз;

б) $\rho = 1$ болса, белгісіз.

6-теорема (Коши белгісі). Теріс емес мүшелі $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ қатары беріліп, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$ шегі бар болсын. Онда, егер

а) $\rho < 1$ болса, қатар жинақты; ә) $\rho > 1$ болса, жинақсыз;

б) $\rho = 1$ болса, белгісіз.

7-теорема (Кошидің интегралдық белгісі)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1)$$

қатар мүшелері өспейтін болсын. Яғни,

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots \quad (2)$$

$f(x)$ функциясы өспейтін және $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \ldots$, $f(n) = u_n \ldots$ болсын.

Онда, егер $\int_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты. Ал, егер меншіксіз интеграл жинақсыз болса, онда қатар да жинақсыз.

Қатар жинақтылығының Коши критерийі

8-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, (1) қатар жинақты болуы үшін $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k = k(\varepsilon))(\forall n > k)$ және $(\forall p > 0)$ саны үшін

$$\left| S_{n+p} - S_{n-1} \right| < \varepsilon \qquad (5)$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

(5)-ті келесідей жазуға да болады:

$$\left|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon \qquad (5').$$