2-дәріс. Көп айнымалының функциясы

Күрделі функцияның туындысы

Анықтама. $z = f(u,v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ функцияларынан құрылған күрделі функция деп екі (x, y) айнымалыларынан тұратын $z = f(u(x, y), v(x, y))$ функцияны айтамыз.

4-теорема. $u = u(x, y)$, және $v = v(x, y)$ функцияларының (x_0, y_0) нүктесінде x және y бойынша дербес туындылары бар болсын, ал $z = f(u,v)$ функциясының u мен v бойынша дербес туындылары (u_0, v_0) нүктесінің маңайында үзіліссіз болсын, мұнда $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Онда күрделі функцияның

$$z = f(u(x, y), v(x, y)) \qquad (4)$$

(x_0, y_0) нүктесінде дербес туындылары бар және мына формулалармен табылады:

$$z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x, \qquad z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y. \qquad (5)$$

Айталық $z = f(x, y)$ екі айнымалының функциясы және $y = y(x)$ бір айнымалының функциясы берілсін, сонда күрделі $z = f(x, y(x))$ функциясының туындысын **толық туынды** деп атайды да былай белгілейді

$$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y \cdot y'_x.$$

Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ сандық функциясы $E \subset R^n$ ашық жиынында анықталып, $x_1, \dots, x_n$ айнымалыларының бірі бойынша $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ дербес туындысы бар болса, онда сол дербес туындының өзі $\frac{\partial f}{\partial x_i} : E \to R^1$ түріндегі функция болып, белгілі бір x_j $j=i$ болуы да мүмкін) айнымалысы бойынша $a \in E$ нүктесінде $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ дербес туындысы бар болуы мүмкін. Бұл сан f функциясының a нүктесінде x_i және x_j айнымалылары бойынша алынған *екінші ретті дербес туындысы* деп аталады да, оны белгілеу үшін $\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $D_{x_j, x_i} f(a)$, $D_{j,i} f(a)$, $f''_{x_j, x_i}(a)$, $f''_{j,i}(a)$, $\partial_{x_j, x_i} f(a)$, $\partial_{j,i} f(a)$, т.б. символдар қолданылады. Мұнда i және j индекстерінің жазылу реті дербес туынды әуелі x_i бойынша, содан соң x_j бойынша алынғанын көрсетеді.

Дербес туынды алу амалын жалғастырып қолдана беруге болады: егер k-ретті $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i1}}(x)$ дербес туындысы анықталған болса, онда $(k+1)$-ші дербес туынды былай анықталады: $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_i \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i1}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i1}}\right](x)$.

Сонымен, жоғары ретті дербес туындылар индуктивті әдіспен анықталады.

Аралас туындылар ұғымы көп айнымалылы функциялар жағдайында ғана мүмкүн. Келесі сұрақ өзінен-өзі айқын түрде туады: аралас туынды алу кезегі нәтижесіне әсер ете ме? Мәселен, әрқашанда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ теңдігі орындала бере ме?

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының k ретті дербес туындысы деп оның $(k-1)$ ретті кезкелген туындысының дербес туындысын айтайды.

Бұл рекуренттік анықтама функцияның k ретті дербес туындысын бұл функцияның k дербес туындыларын бірінің артынан бірін табу жолымен табу мүмкіндігін береді. $f(x,y)$ функциясы нөлінші ретті туынды деп есептеледі.

$f(x,y)$ункциясының бірінші ретті f'_x және f'_y туындыларынан x, y бойынша туындылар алып төрт екінші ретті туындылар аламыз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = (f'_x)'_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = (f'_x)'_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = (f'_y)'_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = (f'_y)'_y.$$

Бұлардан x, y бойынша тағы да туындылар алып 3-і ретті 8 дербес туындыларды табамыз. k ретті екі айнымалының 2^k туындысы бар.

Мысал. $z = x^3 + x^2 y + y^3$ функциясының 2-ретті дербес туындыларын табайық.

$f'_x = 3x^2 + 2xy$, $f'_y = x^2 + 3y^2$, $f''_{xx} = (3x^2 + 2xy)'_x = 6x + 2y$,

$f''_{xy} = (3x^2 + 2xy)'_y = 2x$, $f''_{yx} = (x^2 + 3y^2)'_x = 2x$, $f''_{yy} = (x^2 + 3y^2)'_y = 6y$.

Бұл мысалда $f''_{xy} = f''_{yx}$ және бұл кездейсоқ емес.

Екінші ретті дербес туындылар деп бірінші ретті дербес туындылардан алынған дербес туындыларды айтады:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ дербес туындыларын **аралас туындылар** деп атайды.

7-теорема. Егер $f(x,y)$ функциясы E ашық жиынында анықталып, әрбір $(x,y) \in E$ нүктесінде $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ дербес туындылары бар болсын. Егер осы екі функция (x,y) нүктесінде үзіліссіз болса, онда сол нүктеде олардың мәндері өзара тең болады. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y).$

Салдар. $z = f(x,y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында $(k-1)$–ге дейінгі барлық дербес туындылары, барлық k ретті аралас туындылары үзіліссіз болсын. Онда бұл нүктеде оның k ретті барлық аралас туындылары, тек дифференциалдау реті өзгеше, өз ара тең болады. Бұл салдар x бойынша m, y бойынша $(k-m)$ дифференциалдары бар белгілеулер қолдануға болады:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^m \partial y^{k-m}}.$$

Салдардың шарттары орындалғанда дифференциалдау реттері қортындыға әсер етпейді.

8-теорема. f және g сандық функциялары $E \subset R^n$ ашық жиынында анықталып, $a \in E$ нүктесінде дифференциалдаисын. Онда 1) кез келген λ және μ, нақты сандары үшін $\lambda f + \mu g$ сызықтық комбинациясы да a нүктесінде дифференциалданып, келесі теңдіктер орындалады:

1) $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$

2) tg кебейтіндісі a нүктесінде дифференциалданып, $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$

3) егер $g(a) \neq 0$ болса, оида $\frac{f}{g}$ бөліндісі a нүктесінде дифференциалданып,

$d\left(\frac{f}{g}\right)(a)=\frac{1}{g^2(a)}[g(a)df(a)+f(a)dg(a)]$

Анықтама. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайында k ретке дейінгі барлық дербес туындылары бар және үзіліссіз $z=f(x,y)$ функциясы осы нүктеде k рет дифференциаданатын функция деп аталады.

Анықтама. $z=f(x,y)$ x_0 де k рет дифференциалданатын болсын. Осы функцияның k ретті дифференциалы деп, dx, dy - тұрақты болып қалған жағдайда оның $(k-1)$–і толық дифференциалынан алынған толық дифференциалын айтамыз .

Ол $d^k f$ түрінде белгіленеді.

$$d^2f=d(df)=d(f'_xdx+f'_ydy)=(f'_xdx+f'_ydy)'_x\,dx+$$
$$+(f'_xdx+f'_ydy)'_y\,dy=f''_{xx}(dx)^2+f'_{yx}dydx+f''_{xy}dxdy+f''_{yy}(dy)^2=$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \qquad (8)$$

Осы сияқты 3-ретті толық дифференциалдау формуласын табуға болады.

$$d^3f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3. \quad (9)$$

Осы толық дифференциалдар формулаларындағы дербес туындылар алдындағы коэффициенттер Ньютон биномындағы коэффициенттермен сәйкес келеді.

$$d^kf=\frac{\partial^k f}{(\partial x)^k}(dx)^k+k\frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-1}\partial y}(dx)^{k-1}dy+\ldots+$$
$$+\frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-i}(\partial y)^i}(dx)^{k-i}(dy)^i+\ldots+k\frac{\partial^k f}{\partial x(\partial y)^{k-1}}dx(dy)^{k-1}+\frac{\partial^k f}{(\partial y)^k}(dy)^k=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-i}(\partial y)^i}(dx)^{k-i}(dy^i) \quad (3)$$

Бұл толық дифференциалдар $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ функциясын есептеу үшін қолданылады. Бұрын осы формуланы бірінші дифференциалдау көмегімен жуықтап есептеуге қолдандық:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df.$$

Толық дифференциалдардың жеткілікті санын алып берілген мәнді алдын – ала берілген дәлдіктен Тейлор формуласының көмегімен табуға болады:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df+\frac{d^2f}{2!}+\frac{d^3f}{3!}+\ldots+\frac{d^kf}{k!}.$$

Дифференциал түрінің инварианттылығы. Егер $E\subset R^n$ жиынында анықталған $f(x_1,\ldots,x_n)$ сандық функциясы $a\equiv(a_1,\ldots,a_n)\in E$ нүктесінде дифференциалданса, онда $h_i\equiv dx_i\in(-\infty,+\infty)$ тәуелсіз айнымалыларына тәуелді $df(a)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n\equiv\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx$

сызықты функциясы жоғарыда *f*-тің a нүктесіндегі дифференциалы деп аталған еді. Бұндағы dx_i тәуелсіз айнымалысын тәуелсіз дифференциал деп те атайды.

$f(x_1,\ldots,x_n)$ функциясы үшін $x_1,\ldots,x_n$ өрнектері тәуелсіз айнымалы болса да, $t=(t_1,\ldots,t_m)$ тәуелсіз айнымалыларына тәуелді $x_1=\varphi_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,x_n=\varphi_n(t_1,\ldots,t_m)$ функциялары болса да *f*-тің дифференциалының түрі өзгермей $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\ldots+\frac{\partial x}{\partial x_n}(a)dx_n$ болады, тек қана бірінші жағдайда $dx_i\in(-\infty,+\infty)$ тәуелсіз айнымалы (тәуелсіз дифференциал), ал екінші жағдайда dx_i деген $i=1,2,\ldots,m$ болғандағы $dt_j\in(-\infty,+\infty)$

тәуелсіз айнымалыларына тәуелді $dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi i}{\partial t_j}(b) dt_j$ сызықты функциялары болады. Бұл жағдайда, dx_j тәуелді дифференциал дейді. Осы қасиетті дифференциал түрінің инварианттылығы деп атайды.