Дәрістер

1-дәріс. Көп айнымалының функциясы

Кеңістік пен жазықтықтағы жиындар.

Қарастырылатын екі айнымал функциялар OXY декарттық координаталық жазықтығында, ал үш айнымалды функциялар үш өлшемді кеңістікте декарттық координаталар жүйесінде берілген деп есептейміз.

Мысалы, жазықтықта берілген нүктелер координаталары арқылы $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$, ал кеңстіктегі нүктелер $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$ түрінде жазылады.

Екі нүктенің ара қашықтығын $\rho(X,Y)$ арқылы белгілейміз. Екі нүктенің ара қашықтығы жазықтықта:

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

кеңістікте:

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

формулалары арқылы есептеледі.

Анықтама. $n-$ өлшемді кеңістіктің X нүктесі деп реттелген $x_1,x_2,...,x_n$ нақты сандар жиынын атаймыз: $X=(x_1,x_2,...,x_n)$. Бұл жердегі x_i сандары айнымалы X нүктесінің i - ші координаталары деп аталады $(i=1,2,...,n)$.

$n-$ өлшемді кеңістіктегі екі нүктенің ара-қашықтығы

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2} \qquad (1)$$

формуласы арқылы есептеледі.

Анықтама. $n-$ өлшемді кеңістікте ара қашықтары (1) формула бойынша анықталатын нүктелер жиынын **$n-$өлшемді евклидтік кеңістік** немесе **$n-$өлшемді арифметикалық евклид кеңістігі** деп атап, R^n арқылы белгіленеді.

Егер $n=1$ болса, бір өлшемді кеңістік - түзу,

$n=2$ болса, екі өлшемді кеңістік - жазықтық,

$n=3$ болса, үш өлшемді кеңістік болатындығын элементар математикадан білеміз.

Анықтама. $A\in R^n$, $\varepsilon>0$ болып, $\rho(A,X)<\varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\forall X\in R^n$ жиыны - центрі A нүктесі, радиусы $\varepsilon-$ге тең шар немесе A нүктесінің $\varepsilon-$маңайы деп аталады.

Сонымен, $U(A,\varepsilon)=\{X: X\in R^n, \rho(A,X)<\varepsilon\}$.

координаталық түрде жазсақ, $U(A,\varepsilon)=\left\{X=(x_1,x_2,...,x_n): \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<\varepsilon^2\right\}$.

Егер $n=1$ болса, $A=a$, $X=x$ болғандықтан $U(A,\varepsilon)=\{x: |x-a|<\varepsilon\}$.

Егер $n=2$ болса, $A=(a_1,a_2)$, $X=(x_1,x_2)$ $U(x,\varepsilon)=\{X=(x_1,x_2):(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<\varepsilon^2\}$.

центрі $O(0,0)-$ координатаның бас нүктесі, радиусы ε болатын шеңбер.

Егер $n=3$ болса, $A=(a_1,a_2,a_3)$, $X=(x_1,x_2,x_3)$

$$U(X,\varepsilon)=\{X=(x_1,x_2,x_3):(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2<\varepsilon^2\}.$$

центрі $O(0,0,0)-$ координатаның бас нүктесі, радиусы ε болатын шар.

Егер E жиынының әрбір шектік нүктесі сол жиында жатса, онда E жиынын **тұйық жиын** деп атайды. Басқаша айтқанда, тұйық жиынның өзінде жатпайтын шектік нүктесі жоқ. Сондықтан, бірде-бір шектік нүктесі жоқ жиындар, соның ішінде ақырлы жиындар, анықтама бойынша тұйық жиын болады.

Жиынның іші, сырты және шекарасы.

E^C жиыны $E\subset R^n$ жиынының толықтауыш жиыны. Яғни, $E^C\cup E=R^n$.

$E \subset R^n$ жиыны мен кез-келген $y \in R^n$ нүктесі арасында келесі үш қатынастың біреуі және тек қана біреуі орындалады:

1) $y \in V_\varepsilon(y) \subset E$ кірістірулері, яғни $V_\varepsilon(y) \cap E^C = \varnothing$ теңдігі орындалатындай ε оң саны табылады (у нүктесі Е жиынының ішкі нүктесі);

2) $y \in V_\varepsilon(y) \subset E^C$ кірістірулері, яғни $V_\varepsilon(y) \cap E = \varnothing$ теңдігі, орындалатындай ε оң саны табылады (у нүктесі E^C жиынынын ішкі нүктесі);

3) кез келген ε оң саны мен у нүктесінің $V_\varepsilon(y)$-маңайы үшін $V_\varepsilon(y) \cap E \neq \varnothing$ және $V_\varepsilon(y) \cap E^c \neq \varnothing$ шарттары орындалатын, яғни $V_\varepsilon(y)$ маңайында E жиынында жататын және E жиынында жатпайтын (демек, E^c жиынында жататын) нүктелер әрқашан бар болады.

Осыған сәйкес: 1) E жиынының барлық ішкі нүктелерінен құрылған жиынды E жиынының **іші** деп атайды; 2) қасиетін қанағаттандыратын әрбір y нүктесін E жиынының **сыртқы нүктесі** деп атайды да, олардың бәрі құратын жиынды E **жиынының сырты** деп атайды; 3) қасиетін қанағаттандыратын әрбір у нүктесін Е жиынының **шекаралық нүктесі** деп, ал олардың бәрі құратын жиынды E **жиынының шекарасы** деп атайды.

1°. Ашық жиынның іші өзіне тең. Бұл — жиынның іші анықтамасының тікелей салдары.

2°. Жиынның іші бос жиын болуы мүмкін. Кез келген ақырлы жиын сондай болады, өйткені оның, ішкі нүктесі жоқ. Іші бос жиын болатын ақырсыз жиынның мысалы — жазықтықтағы кез келген кесінді, мәселен, $\{(t,t): 0 \le t \le 1\}$ жиыны.

3°. Кез келген жиынның іші әрқашанда ашық жиын болады. Жиынның іші бос не бос емес жиын.

Тізбек және оның шегі. Жалпы, **тізбек** деп анықталу жиыны оң бүтін сандар жиыны болатын функция аталады. Егер бұл функция мәндері қабылданатын жиын R^n болса, онда оны R^n**-дегі тізбек** деп атайды. Сонымен, егер әрбір k оң бүтін санына белгілі бір f заңы не тәртібі бойынша $f(k) \in R^n$ элементі сәйкес қойылса, онда осы сәйкестікті R^n- дегі тізбек деп атайды. Сандық. (яғни R'-дегі) тізбек жағдайы сияқты функция (тізбек) аргументі болатын k әріпі оған сәйкес функция (тізбек) мәнінің индексі түрінде жазылады: $f(k) = x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$. Бұнда функция аргументі k жақшаға алынып, жоғарғы индекс ретінде жазылған, себебі төменгі индекс элементтің координатасынын номерін белгілеу үшін қолданылады.

Мәселен, $x_i^k = x_i \cdot \cdots \cdot x_i$ (κ рет), ал $x_i^{(k)}$ — тізбектің k-*ші* мүшесінің i-ші координатасы.

Анықтама. R-дегі $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі берілсін. Егер белгілі бір $a \in R^n$ мен кез келген ε оң саны арқылы барлық $k \ge N_\varepsilon$, үшін $\rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратындай $N_\varepsilon > 0$ саны табылса, онда $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ **тізбегінің шегі бар** және **ол а-ға тең** деп айтады да, былай жазады:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = a \quad \text{немесе} \quad x^{(k)} \to a \; (k \to \infty). \tag{1}$$

(1) орындалғанда «$k \to \infty$ болғанда $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *тізбегі а-ға ұмт-лады», «* $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *тізбегі а-ға жинақталады»* деп те айтады.

R^n-дегі тізбек шегінің R^1-дегі шекпен байланысы туралы

1-теорема. R^n-дегі $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі берілсін. $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегінің шегі бар және ол $a \equiv (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ элементіне тең болуы үшін $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ координаталық тізбектерінің әрқайсысының шегі бар және $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ теңдіктері орындалуы қажетті де жеткілікті.

2-теорема. Егер $x^{(k)} \to a$, $y^{(k)} \to b$, $\alpha_k \to \alpha$ болса, онда:

$$1)\ \lim_{k\to\infty}\left(x^{(k)} + y^{(k)}\right) = a + b; \quad 2)\ \lim_{k\to\infty} \alpha_k x^{(k)} = \alpha a; \quad 3)\ \lim_{k\to\infty} < x^{(k)}, y^{(k)} > = < a, b >$$

теңдіктері орындалады.

R^n **-дегі Коши критерийі.** R^1 жағдайындағы Коши критерийі және оның маңызы II тарауда талқыланған еді, R^n жағдайында да сонда айтылғанды қайталауға болады. Әуелі *Коши* (не *фундаментальдық) тізбегін* анықтайық. Бұлай деп әрбір ε оң саны бойынша барлық $k > N_\varepsilon$ және барлық $m > N_\varepsilon$ үшін $\left\|x^{(k)} - x^{(m)}\right\| < \varepsilon$ теңсіздіктерін қанағаттандыратындай N_ε оң саны әрқашанда табылатын R^n-дегі $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$тізбегін атайды. Әрине, R^1 жағдайындағы сияқты, бұл анықтамада $\{x^{(k)}\}$ тізбе-гінің, шегі туралы ештеңе айтылмайды: тізбек мүшелерінің арасындағы қайсыбір қатынас сөз болып отыр. Бір қарағанда аса маңызы жоқ сияқты бұл қасиетті келесі теорема математиканың негізгі ұғымдарының дәрежесіне көтереді.

3-теорема. (R^n-дегі Коши критерийі). R^n-де $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі берілсін. $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі R^n-де жинақталуы үшін, яғни белгілі бір $a \in R^n$ үшін $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ теңдігі орындалуы үшін $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі Коши тізбегі болуы қажетті және жеткілікті.

Егер белгілі бір c оң саны мен кез келген k номері үшін $\left\|x^{(k)}\right\| \le c$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегін **шенелген тізбек** дейді.

4-теорема.(Больцано-Вейерштрасс теоремасы)

Әрбір R^n-дегі шенелген тізбектің жинақталатын тізбекшесі әрқашанда бар болады.

Көп айнымалы сандық функция

Мәндері қабылданатын жиын нақты сандар жиыны болатын функция **сандық функция** деп аталған еді. Анықталу жиыны R^n жиыншасы болатын функция ***n* айнымалылы функция** деп аталады.

$$y = f(x),\ y = f(x_1, x_2, ..., x_n),\ f(x),\ f(x_1, x_2, ..., x_n)\ (x = (x_1, ..., x_n) \in E)$$

белгілеулері қолданылады .

Бірнеше тәуелсіз айнымалдардың $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ немесе $u = f(x, y, z, ..., t)$ функциясы осы әдіспен анықталады.

Функцияның анықталу жиыны

Айталық, реттелген (x, y) сандар жұбына $D(x, y)$ облысында анықталған $u \in E \subset R$ саны сәйкес келсін. Онда u саны x және y айнымалдарының функциясы, x, y –тәуелсіз айнымалдар немес аргументтер, D – **анықталу жиыны**, ал функцияның барлық мәндерінің Е жиыны оның **мәндерінің жиыны** деп аталады. Екі айнымал функцияның символдық жазылуы $u = f(x, y)$ түрінде.

$u = f(x, y)$ функциясының анықталу жиыны қарапайым жағдайларда тұйық қисықпен шенелген жазықтықтың бөлігі ретінде беріледі. Анықталу жиынының шекарасы оған тиісті болуы да, болмауы да мүмкін.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін қандай да бір $\delta > 0$ саны табылып, $(\forall X : 0 < \rho(X, A) < \delta)$ үшін $\left|f(X) - b\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $f(X)$ функциясының A нүктесіндегі **шегі** деп атап, $\lim\limits_{X \to A} f(X) = b$ түрінде жазады.

Көп айнымал функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы бір айнымал функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы тәрізді функция шегімен тығыз байланысты.

Айталық, $z = f(x, y)$ функциясы $P(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін қандай да бір $\delta > 0$ саны табылып, $(\forall X : 0 < \rho(X, A) < \delta)$ үшін

$$\left|f(x, y) - f(x_0, y_0)\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x, y)$ функциясын $P(x_0, y_0)$ нүктесінде **үзіліссіз** деп атайды.

Яғни,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \qquad (2)$$

теңдігі орындалатын болса.

$x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ деп белгілесек, (2) теңдікті төмендегідей жазуға болады:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

Дербес туындылар. Функцияның дифференциалы

Айталық, $z = f(x, y)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінің қандай да бір маңайында анықталған болсын. $M(x, y)$ нүктесінің x айнымалысына қалауымызша алынған Δx өсімшесін беріп, ал y айнымалысын өзгеріссіз қалдырамыз, яғни жазықтықтың $M(x; y)$ нүктесінен $M_1(x + \Delta x; y)$ нүктесіне көшеміз. Бұл жерде Δx -ті M_1 нүктесі М нүктесінің көрсетілген маңайында жататындай етіліп аламыз.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функцияның $M(x, y)$ нүктесіндегі х аргументі бойынша дербес өсімшесі деп $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ айырмасын айтайды: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

у аргументі бойынша дербес өсімшесі деп $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ айырмасын айтайды: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$

у және х аргументері бойынша **толық өсімшесі** деп $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ айырмасын айтайды: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Анықтама. Қос айнымал $z = f(x, y)$ функциясының **x** айнымалы бойынша алынған **дербес туындысы** деп,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

ақырлы шегін айтайды.

Ал ***y*** айнымалы бойынша алынған **дербес туындысы** деп,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

ақырлы шегін атайды.

f'_x – табу кезінде y тұрақты деп есептеледі, ал f'_y тапқанда x - тұрақты деп есептеледі.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының дербес туындылары бар болса, онда оның дербес **дифференциалдары** деп

$$d_x f = f'_x dx, \quad d_y f = f'_y dy.$$

өрнектерін атайды, мұндағы $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$.

Екі айнымалы функцияның дербес дифференциалдары осы екі айнымалының біреуін тұрақты деп белгілеп алғандағы бір айнымалы функцияның дифференциалдары болып табылады.

Анықтама. Егер $f(x, y)$ функциясының (x, y) нүктесіндегі толық өсімшесі

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y, \qquad (1)$$

түрінде өрнектелсе, онда $f(x, y)$ функциясын (x, y) нүктесінде **дифференциалданады** деп атайды. Мұндағы A, B коэффициенттері Δx, Δy өсімшелерінен тәуелсіз ал, $\alpha(\Delta x; \Delta y)$ және $\beta(\Delta x; \Delta y)$ шексіз аз шамалар, егер $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

$$df = Adx + Bdy$$

формуласымен анықталатын өсімшесінің сызықты бөлігін осы функцияның **толық дифференциалы** деп атайды.

Мұнда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

1-теорема. Егер $z = f(x, y)$ функциясы (x, y) нүктесінде дифференциалдатын болса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз.

2-теорема. Егер $z = f(x, y)$ функциясы (x, y) нүктесінде дифференциалдатын болса, онда оның осы нүктеде $f_x'(x; y)$ және $f_y'(x; y)$ дербес туындылары бар. Сонымен қатар $f_x'(x; y) = A$, $f_y'(x; y) = B$ болады.

Онда функцияның толық дифференциалы келесідей өрнектеледі:

$$df = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy \qquad (2)$$

Бірнеше айнымалы функцияның дифференциалдануы үшін дербес туындыларының бар болуы жеткіліксіз.

3-теорема. (Функция дифференциалдануының жеткілікті шарты). Егер $z = f(x, y)$ функциясының (x, y) нүктесінің қандай да бір δ маңайында дербес туындылары бар болып, олар (x, y) нүктесінде үзіліссіз болса, онда функция (x, y) нүктесінде дифференциалданады.