Лекция 9. Циклы. Связность. Деревья. Базис циклов. Метрические характеристики графов. Четность графов. Цикломатическое число.

Цепи. Циклы. Связность.

Последовательность вершин и ребер графа G

$$v_{i_0} e_1 v_{i_2} e_2 v_{i_2} \dots v_{i_{n-1}} e_n v_{i_n} \qquad (*)$$

называется **путем [** v_{i_0}, v_{i_n} **] из вершины** v_{i_0} **в вершину** v_{i_n}, если $\Gamma(e_k) = (v_{i_{k-1}}, v_{i_k})$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Вершина v_{i_0} называется **началом**, а v_{i_n} - **концом пути**; число n называется **длиной пути** (путь нулевой длины состоит из одной вершины). В общем случае среди вершин и ребер последовательности (*) могут быть повторения. Каждое ребро пути может быть ориентированным (обязательно из $v_{i_{k-1}}$ в v_{i_k}) или неориентированным.

Путь естественно рассматривать как непрерывную траекторию движения по вершинам и ребрам графа. Для графа без кратных ребер путь можно задавать последовательностью вершин.

Цепью называется последовательность вершин и ребер, образующая путь в соотнесенном неориентированном графе. Отсюда всякий путь является цепью, обратное верно только для неориентированных графов, в которых понятия пути и цепи совпадают.

Если в последовательности (*) $v_{i_0} = v_{i_n}$ $(n > 0)$, т.е. начальная вершина совпадает с конечной, то такой путь (соответственно цепь) называется **контуром** (соответственно **циклом**) **длины n**. Контур (цикл) не имеет особо выделенной вершины и может быть записан в виде последовательности (*), начиная (и заканчивая) любой его вершиной.

Путь, цепь, контур, цикл называются **простыми** (соответственно **элементарными**), если каждое их ребро (соответственно каждая вершина и каждое ребро) входит в последовательность (*) ровно один раз (не считая последней вершины в записи цикла). Можно рассматривать цепь как траекторию на графе. Тогда путь - это траектория, проходящая каждое свое ребро в направлении его ориентации. Простой путь не проходит дважды ни по одному своему ребру, элементарный путь не проходит дважды ни через одну вершину. В последовательности (*) ребро может повторяться только тогда, когда в ней повторяется некоторая вершина или когда последовательность (*) имеет такой вид:

$$v_{i_0}\, e_1\, v_{i_n}\, e_1\, v_{i_0} \qquad (**)$$

Элементарные путь, цепь, контур, цикл можно считать просто некоторыми подграфами графа G.

Если цепь $[v_{i_0}, v_{i_n}]$, отличная от (**), не является элементарной, то некоторая вершина v входит в последовательность (*) хотя бы дважды. Часть последовательности (*) между этими двумя вхождениями вершины v_{i_k} есть цикл, и после вычеркивания этой части из последовательности (*) остается цепь с теми же концами v_{i_0} и v_{i_n}. Повторяя эту операцию пока возможно, мы получим в результате элементарную цепь или цепь вида (**), которую можно заменить одной вершиной v_{i_0}. То же можно сделать с простым циклом. Тем самым устанавливаются следующие свойства цепей:

- всякая цепь $[v_1, v_2]$ содержит элементарную подцепь с теми же концами;

- простая, но не элементарная цепь содержит элементарный цикл;

- простой цикл, проходящий через ребро e (вершину v), содержит элементарный подцикл, проходящий через e (v).

Таким же способом устанавливаются аналогичные утверждения для пути и для контура.

Легко видеть, что для любого графа отношение между вершинами “быть связанными цепью” есть транзитивное замыкание отношения соседства; оно является рефлексивным (вершина сама представляет собой цепь нулевой длины), симметричным (направление цепи не имеет значения) и транзитивным (склейка,т.е. последовательное прохождение цепей [a,b] и [b,c] дает цепь [a,c]). Таким образом, это отношение есть отношение эквивалентности. Вершины графа разбиваются на классы эквивалентности. Подграфы, натянутые на эти классы вершин, называются **компонентами связности** графа (или **связными компонентами**). Любые две вершины из одной связной компоненты соединены хотя бы одной цепью, вершины же из разных компонент не связаны цепью.

Граф называется **связным**, если он имеет ровно одну компоненту связности, т.е. если любые две его вершины связаны цепью. Компоненты связности любого графа G являются максимальными (по включению) связными подграфами графа G, т.е. если к связной компоненте добавить некоторое множество вершин и/или ребер, ей не принадлежащих, то полученный подграф будет несвязным. Для решения многих задач достаточно рассматривать только связные графы в том смысле, что задача для несвязного графа сводится к рассмотрению его отдельных компонент связности.

На множестве вершин V связного графа можно ввести **расстояние** как минимальное число ребер $d(v_1, v_2)$ в цепи, связывающей v_1 и v_2. Очевидно, минимум достигается на элементарных цепях. Для $d(v_1, v_2)$ выполнены все свойства расстояния:

1) $d(v_1, v_1) = 0$, $d(v_1, v_2) > 0$ при $v_1 \neq v_2$;

2) $d(v_1, v_1) = d(v_2, v_1)$;

3) $d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) \geq d(v_1, v_3)$ (неравенство треугольника).

Таким образом, V образует метрическое пространство.

Замечание. Для некоторых задач ребрам графа приписывают числовые значения, называемые весом или длиной. В этих случаях длиной цепи называют сумму длин входящих в нее ребер. Для так определенной длины цепи расстояние между вершинами есть длина кратчайшей цепи.

Деревья

Ребро e произвольного графа G называется **циклическим**, если оно принадлежит хотя бы одному элементарному циклу в графе, и **ациклическим** в противном случае. Примером ациклического ребра является висячее. Справедливы два простых утверждения:

1) при удалении из связного графа циклического ребра граф остается связным;

2) при удалении ациклического ребра граф становится несвязным.

Первое подтверждается возможностью для любой цепи заменить циклическое ребро цепью из остальных ребер цикла. Второе доказывается от противного: если бы граф оставался связным, то концы удаленного ребра были бы связаны элементарной цепью; возвратив удаленное ребро, получили бы элементарный цикл вопреки тому, что ребро ациклическое.

Связный граф без циклов называется **деревом**.

Иначе говоря, дерево - это граф, все ребра которого ациклические. Имеется несколько эквивалентных определений дерева, устанавливающих ряд его характеристических свойств, подробнее рассмотренных ниже:

1) связный граф, который становится несвязным при удалении любого ребра;

2) связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин;

3) граф, любые две вершины которого связаны единственной элементарной цепью;

4) граф без циклов, в котором после добавления ребра, связывающего две любые вершины, появляется цикл.

В связном графе G будем последовательно удалять циклические ребра до тех пор, пока это возможно, т.е. пока не останется ни одного циклического ребра. Мы придем к связному подграфу графа G с тем же множеством вершин, но без элементарных циклов, т.е. к дереву, называемому **остовом графа** G. Остов выбирается, вообще говоря, неоднозначно, однако все ациклические ребра обязательно входят в любой остов. Относительно остова D все ребра подграфа G \ D называются **хордами**. Каждая хорда связывает две вершины остова.

Пусть связный граф G с b вершинами содержит (b - 1) ребер. Докажем, что G - дерево в соответствии с характеристическим свойством (2). Действительно, в противном случае, удалив некоторое число q циклических ребер, мы получили бы остов с b вершинами и (b - 1 - q) ребрами, что невозможно (так как остов - дерево).

Эйлеровы (четные) графы. Цикломатическое число

Здесь мы будем рассматривать подграфы, может быть, несвязные, содержащие все вершины графа. Пусть G - граф, содержащий p занумерованных ребер $e_1, e_2, ..., e_p$. Каждому подграфу H H G поставим в соответствие p-мерный вектор $(a_1, a_2, ..., a_p)$ из нулей и единиц: $a_i = 1$, если $e_i \in H$; $a_i = 0$, если $e_i \notin H$ (**характеристический вектор подграфа H**). Это соответствие, очевидно, взаимно однозначное. Более того, сумме по модулю 2 подграфов H_1 и H_2 - $H_1 \oplus H_2$ - соответствует (поразрядная) сумма по модулю 2 их характеристических векторов. Над множеством коэффициентов {0, 1} множество всех подграфов образует линейное пространство: умножение любого подграфа H на 1 дает H, умножение на 0 - пустой подграф, т.е. подграф, не содержащий ребер и состоящий из одних изолированных вершин графа G. Нетрудно видеть, что пространство подграфов графа G и пространство характеристических векторов его подграфов изоморфны и имеют размерность p. Базисом может служить множество всех однореберных подграфов. Характеристический вектор каждого такого подграфа содержит ровно одну единицу, причем для разных подграфов - на разных местах.

Назовем граф **четным**, если степени всех его вершин - четные числа. Любую элементарную цепь (кроме цикла) в четном графе можно продлить ребром, не принадлежащим цепи, так как конец цепи имеет степень 1 в цепи и степень не меньше 2 в графе. Если граф конечен, то, продолжая цепь, мы через конечное число шагов вторично придем в уже пройденную вершину, т.е. часть полученной (уже не элементарной) цепи образует элементарный цикл, после удаления которого остается четный граф, так как все степени изменяются на четное число (2 - для вершин цикла и 0 - для вершин, не принадлежащих циклу). В этом графе можно снова выделить некоторый элементарный цикл и т.д., пока в графе не останется ни одного ребра. Таким образом, каждый конечный четный граф можно представить в виде суммы попарно не пересекающихся (по ребрам) элементарных циклов, откуда, в частности, следует, что каждое его ребро циклическое.

Если конечный четный граф связен, то нетрудно показать (например, индукцией по числу его элементарных циклов), что в нем существует простой (т.е. не самопересекающийся по ребрам) цикл, содержащий все ребра графа. Такой цикл называется **эйлеровым циклом**, а обладающий им граф называется **эйлеровым графом**. Поскольку каждая вершина простого цикла имеет в нем четную степень (каждое прохождение через вершину по циклу использует два ребра, инцидентных этой вершине), то доказана следующая теорема.

Теорема Эйлера. Для того чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был четным.

В конечном несвязном четном графе все компоненты связности - эйлеровы графы.

Будем называть вершину ориентированного графа **равновесной**, если число дуг, входящих в вершину, равно числу дуг, исходящих из нее. Ориентированный граф назовем **равновесным**, если все его вершины равновесные.

Обход (неориентированного) эйлерова графа по эйлерову циклу ориентирует каждое ребро графа в направлении обхода. Ясно, что при такой ориентации эйлеров граф является равновесным. Пусть теперь дан равновесный граф. Повторяя предыдущее рассуждение (вместо циклов надо говорить о контурах), легко показать, что каждый конечный равновесный граф можно представить в виде суммы элементарных контуров, попарно не пересекающихся по ребрам (а также то, что в конечном связном равновесном графе существует простой контур, содержащий все ребра графа).

Другими словами, теорема Эйлера означает, что четность всех вершин графа есть необходимое и достаточное условие существования обхода графа, при котором каждое ребро проходится ровно один раз.

Из теоремы Эйлера можно вывести интересное следствие. В произвольном связном графе G раздвоим каждое ребро $e = (v_1, v_2)$, т.е. заменим его парой кратных ребер e’, e’’ с теми же вершинами. Степень каждой вершины удвоится и станет четной. В полученном четном графе G_1 существует эйлеров цикл (а если ребра e’, e’’ ориентировать в противоположных направлениях, то каждая вершина будет равновесной и существует эйлеров контур). Если рассмотреть его как обход графа G_1, снова склеить пары e’, e’’ в одно ребро, то в первоначальном графе G эта траектория будет (уже не простым) циклом, проходящим через каждое свое ребро ровно два раза (причем в противоположных направлениях). Итак, в каждом связном графе существует цикл, содержащий ровно 2 раза каждое ребро графа, что можно трактовать как соответствующий обход лабиринта с возвращением в начало обхода.

3. Элементарный путь, проходящий через все вершины графа, называется **гамильтоновым**; если совпадают его начало и конец, то это гамильтонов цикл.

Известная задача о коммивояжере формулируется так: имеется n городов, попарные расстояния между которыми заданы. Коммивояжер желает посетить все города так, чтобы суммарная длина пути была минимальной. Это означает, что нужно найти гамильтонов путь минимальной длины в полном графе K_n, ребрам которого приписаны положительные числа - длины ребер (для варианта задачи - обхода с возвращением в начало пути - ищется минимальный гамильтонов цикл).

Для несвязного графа с k компонентами связности базис пространства четных подграфов получается объединением базисов его связных компонент, а число ребер и вершин суммируется. Поэтому, если i-я компонента содержит p_i ребер и b_i вершин, то $\nu = p - b + k$, где $p=\sum_{i=1}^{k} p_i$, $b=\sum_{i=1}^{k} b_i$. Число ν называется **цикломатическим числом графа**. Ввиду того, что $\nu>0$, для любого графа справедливо неравенство $k \geq b-p$. Деревья - это связные графы с цикломатическим числом, равным 0.

Примеры. 1) Для полного графа K_5 (5 вершин, = 10 ребер) цикломатическое число $\nu = 10 - 5 + 1 = 6$.

2) Для графа на рис. 7 имеем $p = 18$, $b = 11$, $k = 1$, откуда

$$\nu = 18 - 11 + 1 = 8.$$

3) Рассмотрим соотнесенный неориентированный граф для графа на рис. 10б. Число его вершин равно числу перестановок из 4 элементов: $4! = 24$. Степени всех вершин равны 3. Поэтому число ребер графа $p = 24 \cdot 3 / 2 = 36$. Граф связен, т.е. $k = 1$. Цикломатическое число равно $n = 36 - 24 + 1 = 13$.