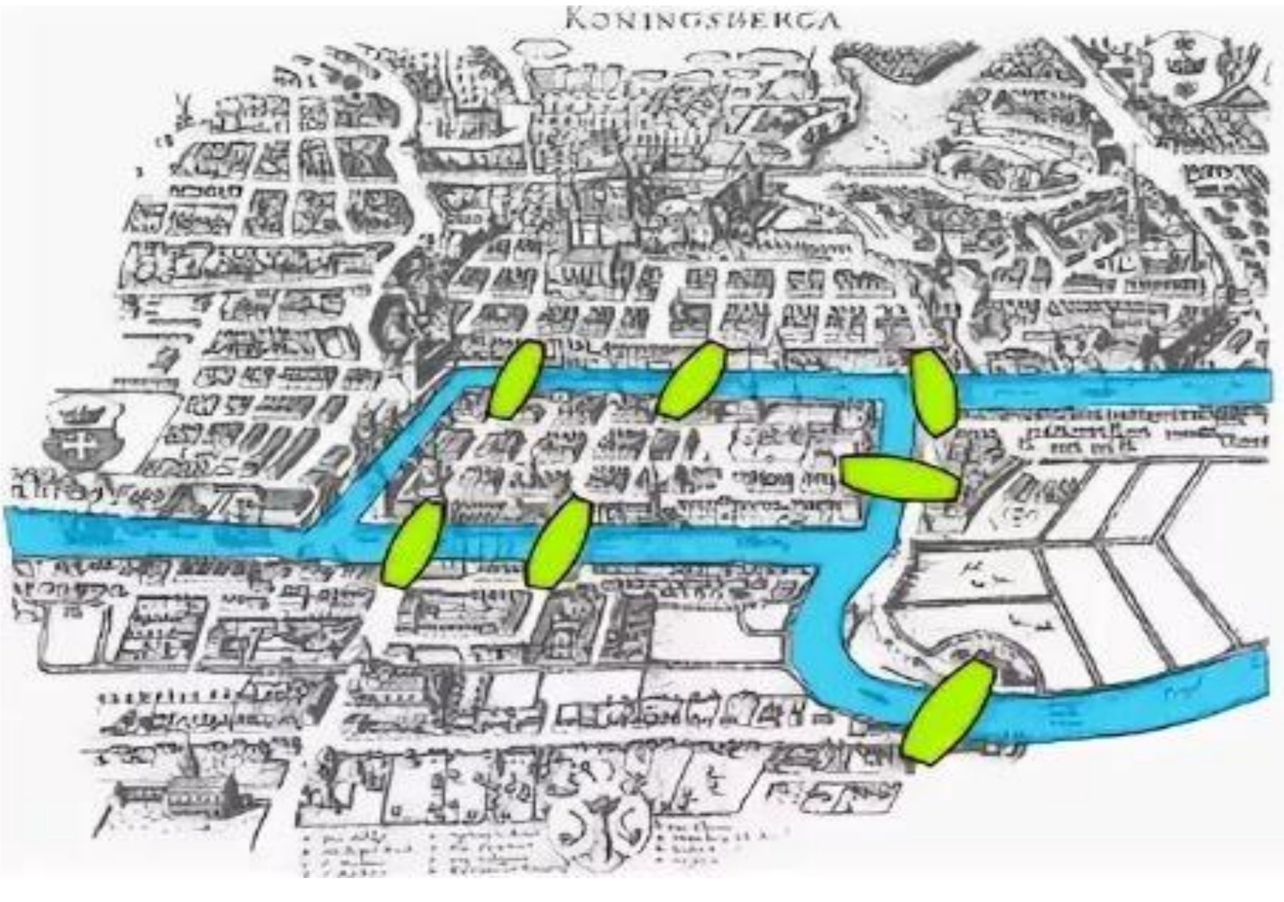
**Лекция 7**. Графы. Определение графов. Способы задания графов. Матрица инциденций и матрица соседства вершин графов. Изображение графов. Ориентированные и неориентированные графы. Двудольные графы. Полные графы.

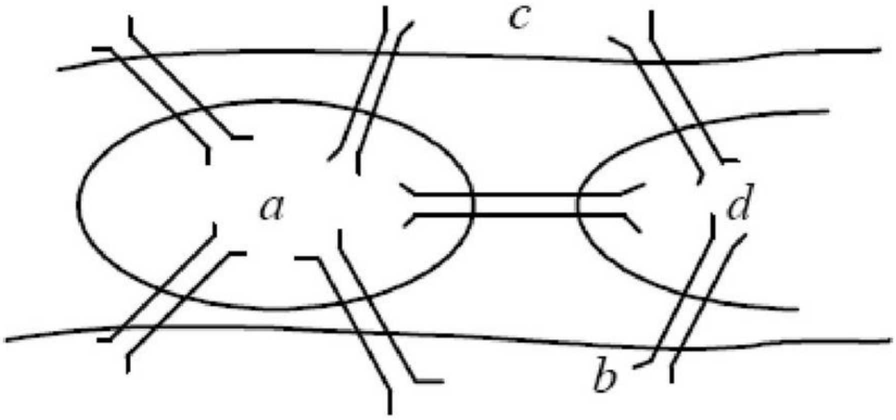
**Задача о семи мостах**

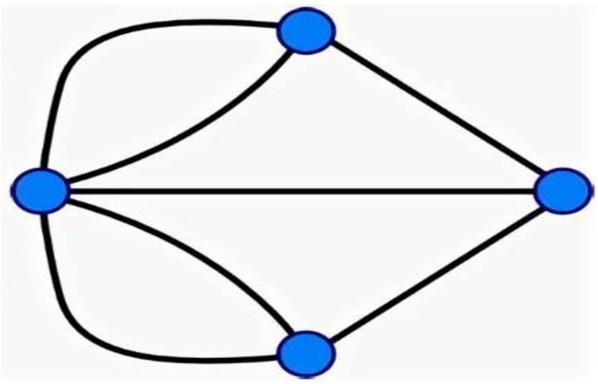
Издавна среди жителей старого Кенигсберга была в ходу такая головоломка: как так исхитриться и пройти по всем городским мостам через реку Преголя, чтобы не пройти ни по одному из них дважды. Не один мозг был сломан в попытках решить эту задачу как теоретически, так и во время прогулок. Более того, доказать или опровергнуть возможность существования такого маршрута никто тоже не мог.

В 1736 году талантливый во всех смыслах член Петербургской академии наук Леонард Эйлер, внесший существенный вклад в становление российской науки, взялся за решение этой задачи.



Граф — это система некоторых объектов вместе с некоторыми парами этих объектов, изображающая отношения связи между ними.



Термин «Граф» впервые в 1936 году ввел венгерский математик Денеш Кениг в работе «Теория конечных и бесконечных графов» (Kőnig, Dénes. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaf, 1936).

Теория графов – раздел дискретной математики изучающий свойства графов. Однако теория графов имеет огромное количество направлений применений и нстолько развилась, что его можно считать отдельной наукой и предметом отдельной учебной дисцилины.

## Способы задания графов

Граф - это система некоторых объектов вместе с некоторыми парами этих объектов, изображающая отношения связи между ними. Графами удобно изображаются сети коммуникаций, дискретные многошаговые процессы, системы бинарных отношений, химические структурные формулы, различные схемы и диаграммы и др.

**Неориентированный граф** (соответственно **ориентированный граф**, или **орграф**) G - система $G = (V, E, \Gamma)$, состоящая из множества элементов $V = \{v\}$, называемых вершинами графа, множества элементов $E = \{e\}$, называемых ребрами, и отображения $\Gamma: E \to V^2$, ставящего в соответствие каждому элементу $e \in E$ неупорядоченную (соответственно упорядоченную) пару элементов $v_1$, $v_2 \in V$, называемых концами ребра e.

$V \cup E$ образует множество элементов графа; при этом предполагается, что $E \cap V = \varnothing$. Отображение Г определяет отношение **инцидентности** ребра с каждым из своих концов. Для графа G = (V, E, Г) употребляется также более короткое обозначение G = (V, E) без указания инцидентностей, которые определяются контекстом. По количеству элементов графы делятся на конечные и бесконечные. Здесь мы будем рассматривать, в основном, конечные графы, не оговаривая этого специально.

Если $Г(e) = (v_1, v_2)$ - упорядоченная пара (т.е. $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ при $v_1 = v_2$), то ребро **e** называется **ориентированной дугой**, *исходящей из вершины* $v_1$ *и входящей в вершину* $v_2$; $v_1$ называется началом, а $v_2$ - концом дуги e. Если $Г(e) = (v_1, v_2)$ - неупорядоченная пара, то ребро e называется **неориентированным**. Всякому графу G можно поставить в соответствие *соотнесенный неориентированный граф* с теми же множествами V и E и инцидентностями, но все пары неупорядоченные.

Вершина, не инцидентная ни одному ребру, называется **изолированной**. Вершина, инцидентная ровно одному ребру, и само это ребро называются **концевыми**, или **висячими**. Ребро с совпадающими концами называется **петлей**. Две вершины, инцидентные одному и тому же ребру, называются соседними (или **смежными**). Два ребра, инцидентные одной и той же вершине, называются **смежными**. Ребра, которым поставлена в соответствие одна и та же пара вершин, называются **кратными**, или **параллельными**.

Существует несколько способов задания графов, связанных с различной формой задания функции Г. Вот некоторые из них для конечных графов.

1) Перечисление (список) ребер графа с указанием их концов и добавлением списка изолированных вершин.

2) **Матрица инциденций графа с b вершинами и p ребрами** - прямоугольная матрица $A = \| a_{ij} \|$ с b строками и p столбцами, строки которой соответствуют вершинам графа, а столбцы - ребрам, причем для неориентированного графа элемент матрицы $a_{ij}$ равен 1, если вершина $v_i$ и ребро $e_j$ инцидентны, и равен 0 в противном случае. Для ориентированного графа $a_{ij} = -1$, если $v_i$ является началом дуги $e_j$, и $a_{ij} = +1$, если $v_i$ - конец дуги $e_j$. В каждом столбце матрицы инциденций - два ненулевых элемента, если ребро - не петля. Петле соответствует элемент, равный 2.

3) **Матрица соседства (смежности) вершин графа с b вершинами** - квадратная матрица $B = \| b_{ij} \|$ размерности b, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, причем неотрицательный элемент $b_{ij}$ равен числу ребер, идущих из вершины $v_i$ в вершину $v_j$ ( $b_{ij}$ не равно, вообще говоря, $b_{ji}$, однако для неориентированных графов матрица соседства - симметричная). Для несмежных вершин соответствующий элемент матрицы равен 0.

Если матрица инциденций задает граф однозначно, то матрица соседства вершин определяет граф с точностью до замены любого неориентированного ребра парой противоположно направленных дуг между теми же вершинами. Однако для графов без кратных ребер задание графа и этой матрицей однозначно, элементы матрицы соседства равны в этом случае 0 или 1.

4) Для наглядности граф часто представляют в виде геометрического объекта: вершинам соответствуют различные выделенные точки в пространстве (на плоскости), ребрам - отрезки кривых, связывающие соответствующие точки и не проходящие через выделенные точки, отличные от их концов. Отношению инцидентности вершин и ребер графа соответствует при этом геометрическая инцидентность выделенных точек и линий. Кроме того, предполагается, что кривые попарно не пересекаются во внутренних точках. Такое представление графа называется **реализацией**.

## Пример выполнения упражнения

### *Задание*

Ориентированный граф G с множеством вершин V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задан списком дуг E = {(1, 4) (1, 6) (2, 1) (2, 2) (2, 6) (2, 6) (3, 2) (3, 4) (4, 6) (5, 2) (5, 4) (5, 4) (5, 5) (6, 2) (6, 5) (7, 1) (7, 6)}.

Построить реализацию графа G.

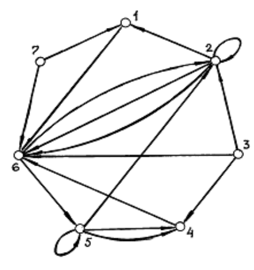
Построить матрицу инциденций графа G.

Построить матрицу соседства вершин графа G.

Для соотнесенного неориентированного графа построить матрицу соседства вершин.

### *Решение*

1. Построим реализацию графа G. Изображения вершин 1,2,…,7 разместим в вершинах правильного 7-угольника. Соединим пары вершин в соответствии со списком дуг, избегая пересечения трех ребер в одной точке. Ориентацию дуг обозначим стрелками.




2. Построим матрицу инциденций графа G. Число ребер графа -18. В прямоугольной матрице $A = \left\| a_{ij} \right\|$ размерности 7x18 последовательно заполняем столбцы в соответствии со списком дуг: каждой дуге $e_k = (i, j)$, где $i \neq j$ соответсвуют элементы $a_{ik}$ = -

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 | |
| 2 | | | -1 | 2 | -1 | -1 | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | |
| 3 | | | | | | | -1 | -1 | -1 | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | | | | | | | 1 | | -1 | | 1 | 1 | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | -1 | -1 | -1 | 2 | | 1 | | |
| 6 | | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | | | -1 | -1 | | 1 |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | -1 | -1 |

<table>
<tr><td>1 и $a_{jk}$ = +1. Петле $e_k = (i, i)$ соответствует $a_{ik}$ = 2.</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Построим матрицу соседства вершин графа G. В квадратной матрице $B = \|b_{ij}\|$ размерности 7x7 каждой дуге $e_k = (i, j)$, соответствует элемент $b_{ij}$ = 1, кроме кратных дуг, котором соответствует элемент равный кратности дуг.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4. Для соотнесенного неориентированного графа построим матрицу соседства вершин. Квадратная матрица $C = \|c_{ij}\|$ размерности 7x7 строится из предыдущей матрицы соседства вершин $B = \|b_{ij}\|$ по формулам:<br><br>$c_{ij} = c_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$, для $i \neq j$,<br><br>и $c_{ii} = b_{ii}$.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

## Примеры графов, имеющих интересные применения

(1) **Полным** графом называется граф без кратных ребер (и иногда без петель), в котором любые две вершины соединены ребром (ориентированным или неориентированным). Полный неориентированный граф с b вершинами обозначается $K_b$. Очевидно, граф $K_b$ содержит = b(b-1)/2 ребер. Полный ориентированный граф иногда называют турниром, поскольку он отражает результат состязания по круговой системе в один круг. Полный граф представляет бинарное отношение R: если R рефлексивно, то граф - с петлями; если R симметрично, то граф - неориентированный, если R антисимметрично, то – ориентированный.

(2) **Двудольным** графом называется граф, вершины которого разбиты на два непересекающихся класса: $V = V_1$ И $V_2$, а ребра связывают вершины только из разных классов - не обязательно все пары. Если же каждая из вершин класса $V_1$ связана ребром с каждой вершиной класса $V_2$, то граф называется **полным двудольным** и обозначается $K_{m,n}$, где $m = |V_1|$, $n = |V_2|$. Очевидно, граф $K_{m,n}$ содержит (m+n) вершин и mn ребер.