Лекция 6. Элементы комбинаторики. Основные комбинаторные конфигурации. Бином Ньютона. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты. Приложения к теории вероятностей и теоретической физике.

Основные комбинаторные конфигурации

1. Среди основных задач комбинаторики выделяют следующие: пересчет, перечисление, классификация и оптимизация. Если требуется определить количество элементов, обладающих некоторым свойством или совокупностью свойств, то это задача пересчета. Если при этом необходимо указать список элементов, то это задача перечисления. Если пересчет приводит к слишком большим числам, то отказываются от соответствующего перечисления и только классифицируют элементы с помощью какого-нибудь соотношения, - и тогда это задача классификации. В некоторых задачах на множестве решений можно ввести функцию величины и относительно этой функции рассматривать задачу оптимизации: найти экстремум функции на определенном множестве объектов, либо указать все или некоторые объекты, для которых достигается экстремальное значение.

2. **Комбинаторная конфигурация** - это расположение конечного множества элементов, удовлетворяющее ряду специальных свойств. К основным комбинаторным конфигурациям относятся сочетания, размещения и перестановки. Ряд других конфигураций может быть сведен к ним.

Набор (множество или кортеж) элементов ($x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$), составленный из элементов множества X = ($x_1, x_2, \ldots x_n$), называется **выборкой объема k из n элементов**, или (**n, k**)-**выборкой**. Выборки, различающиеся составом элементов, всегда считаются различными.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок элементов в ней задан (т.е. она представляет из себя кортеж). Две упорядоченные выборки, различающиеся только порядком следования элементов, считаются различными. Если порядок элементов в выборке несуществен, то выборка называется **неупорядоченной**.

Упорядоченная (n, k)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (**n, k**)-**размещением с повторениями**, или **размещением с повторениями из n элементов по k**. Если элементы (n, k)-выборки попарно различны, то она называется (**n, k**)-**размещением без повторений**, или **размещением без повторений из n элементов по k**.

(**n, n**)-**размещения без повторений** называются **n-перестановками**, или **перестановками из n элементов**.

Неупорядоченные (n, k)-выборки называются **сочетаниями: с повторениями** или **без повторений**. Заметим, что (n, k)-сочетание без повторений - это k-элементное подмножество n-элементного множества.

Если элементы в (n, k)-выборке не могут повторяться, то, очевидно, выполнено неравенство $k \le n$. Для выборки с повторениями возможно условие $k > n$.

Замечание. Когда мы говорим о выборках с повторениями, это не значит, что в ней обязательно есть повторяющиеся элементы; размещения (соответственно, сочетания) без повторений составляют подмножество множества размещений (соответственно, сочетаний) с повторениями.

Пример. Выборка (b, d, e) может рассматриваться как (n, 3)-выборка с повторениями, так и без них при любом $n \geq 3$; выборка (b, d, e, d) - только как (n, 4)-выборка с повторениями при $n \ge 3$.

3. В комбинаторике можно выделить два основных правила: правило суммы и правило произведения.

Пусть X - конечное множество из n элементов. Тогда говорят, что один объект из X можно выбрать n способами, и пишут $|X|=n$ Если X и Y - непересекающиеся множества $|X|=n$ и $|Y|=m$ то $|X+Y|=m+n$. Свойство может быть распространено на большее число множеств.

Пусть $\{X_i\}$ - система попарно не пересекающихся множеств: $X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|. \qquad (1)$$

Это **правило суммы**, или **правило альтернатив**.

Если объект $x \in X$ может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект $y \in Y$ может быть выбран m способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) может быть осуществлен mn способами. Это **правило произведения**. Оно также распространяется на большее число множеств. Для системы множеств $\{X_i\}$, i = 1, 2,..., k, где $|X_i| = m_i$, выбор упорядоченной последовательности из k объектов (x1, x2,..., xk), xi О Xi, может быть осуществлен m1 Ч m2 Ч ... Ч mk способами.

Пример. Автомобильные номера имеют формат AZZZZAA (A - любая буква русского алфавита, кроме Ё, Й, Ъ, Ы, Ь, которые не употребляются в номерах; Z - произвольная цифра). Число различных возможных номеров равно произведению 28 Ч 10 Ч 10 Ч 10 Ч 10 Ч 28 Ч 28 = 219520000.

Для пересекающихся множеств выполнены более сложные соотношения. Нетрудно убедиться, что для двух множеств X, Y число элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, т.е. их объединению, равно

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \tag{2}$$

(ср. формулу вероятности суммы двух событий в теории вероятностей).

Для трех множеств X, Y, Z число элементов, принадлежащих их объединению, равно

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|. \tag{3}$$

Упражнение. Постройте диаграммы Венна для общего случая пересечения двух и трех множеств и проверьте соотношения (2) и (3).

Соотношениям (2) и (3) можно придать другую форму. Если рассмотреть множества X, Y, Z как подмножества универсального множества U, то $\left|\overline{X \cup Y}\right| = |U| - |X \cup Y|$, откуда

$$\left|\overline{X \cup Y}\right| = |U| - (|X| + |Y|) + |X \cap Y|. \tag{4}$$

Аналогично:

$$\left|\overline{X \cup Y \cup Z}\right| = |U| - (|X| + |Y| + |Z|) + (|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|) - |X \cap Y \cap Z|. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) представляют частные случаи **принципа включения и исключения**, называемого также принципом решета.

Пусть рассматриваются n свойств P(1), P(2), ..., P(n) и N_i – число элементов некоторого N-элементного множества, обладающих свойством P(i), N_{ij} - число элементов, обладающих свойствами P(i) и P(j), и вообще число элементов, обладающих свойствами. Тогда число N(0) элементов, не обладающих ни одним из этих свойств, задается знакопеременной алгебраической суммой:

$$N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i<j} N_{ij} - \ldots + (-1)^s \cdot \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_s} N_{i_1 i_2 \ldots i_s} + (-1)^n \cdot N_{12\ldots n} \tag{6}$$

Формулы пересчета числа комбинаторных конфигураций

1. Число (n, k)-размещений без повторений A_n^k может быть определено с помощью правила произведения. Первый из k элементов размещения может быть выбран n способами, второй - (n - 1) способами, поскольку элемент, выбранный первым, не должен быть повторен; аналогично, для третьего (если k>2) элемента остается (n-2) способов и т.д. Всего k элементов могут быть выбраны =n(n–1)...(n–k+1) способами: произведение k убывающих на 1 сомножителей, начиная с n. По-другому, используя обозначение n! = 1·2 ... · n, можно записать:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

.

Число n-перестановок P_n равно $n!$.

(n, k)-размещения с повторениями - это кортежи (по-другому, слова) длины k в n-элементном алфавите. Используя правило произведения, нетрудно показать, что число различных (n, k)-размещений с повторениями $\hat{A}_n^k = n^k$.

2. Числа (n, k)-сочетаний без повторений обозначаются символами $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ или $\binom{k}{n}$ и называются также **биномиальными коэффициентами**, поскольку совпадают с коэффициентами формулы бинома Ньютона для n-й степени двучлена x + y:

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}. \qquad (7)$$

Биномиальные коэффициенты можно найти с помощью **треугольника Паскаля:**

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
	. . . .

Каждое число строки, кроме крайних, равных единице, можно получить как сумму двух ближайших чисел, находящихся над ним в предыдущем ряду.

Число (n, k)-сочетаний с повторениями вычисляются по формуле:

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$

3. Рассмотрим всевозможные размещения с повторениями $a_1a_2...a_n$ из n элементов с дополнительным условием: в каждом из них b_1 элементов первого рода, b_2 элементов второго рода и вообще b_i элементов i-го рода (i = 1, 2,..., r). Естественно, выполнено равенство $b_1 + b_2 +...+ b_r = n$. Заменим b_i элементов i-го рода различающимися элементами $b_{i1},..., b_{ib}$ так, чтобы все элементы стали различными, и получим n! перестановок. Каждое исходное размещение дает $b_1! \ b_2! \ ... \ b_r!$ перестановок. Следовательно, число исходных размещений равно

$$\frac{n!}{b_1!\cdot b_2!\cdot\ldots\cdot b_r!}, \quad \text{где } b_1 + b_2 + \ldots + b_r = n.$$

Это число называется **полиномиальным коэффициентом**: оно равно коэффициенту при произведении в разложении по степеням переменных полинома $(x_1 + x_2 +...+ x_r)^n$. Биномиальные коэффициенты представляют частный случай при r = 2.