

Лекция 5. Аксиоматические теории Исчисление высказываний. Операции над предикатами. Предикатные формулы. Тавтологии. Тезис Черча. Исчисление предикатов. Проверка правильности исчислений высказываний. Теорема дедукции.

Рассмотрим аксиоматическую логическую систему, которая естественным образом связана с логикой высказываний. Для описания логического исчисления необходимо указать язык, аксиомы и правила вывода исчисления, понятие формулы и доказуемой формулы исчисления. Язык и понятие формулы исчисления высказываний совпадают с соответствующими понятиями логики высказываний.

Аксиомы исчисления высказываний:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \wedge B \rightarrow A$
4. $A \wedge B \rightarrow B$
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
10. $\neg \neg A \rightarrow A$

Правило вывода (Modus Ponens): $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$

Доказуемые формулы. Формула D называется *доказуемой (теоремой)*, если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \dots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i , $i = \overline{1, n}$, либо аксиома, либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих формул. Последовательность формул $D_1, D_2, \dots, D_n$ называется доказательством. Число n называется длиной доказательства. Если D доказуема, то пишут $\vdash D$.

Пример: $A \rightarrow A$ доказуемая формула, длина доказательства 5.

Доказательство:

- 1) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (аксиома 2)
- 2) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (аксиома 1)
- 3) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP(2,1))
- 4) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (аксиома 1)
- 5) $A \rightarrow A$ (MP (4,3)).

Выводимые формулы. Формула D называется *выводимой* из формул $A_1, A_2, \dots, A_m$, если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \dots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i , $i = \overline{1, n}$, либо аксиома, либо одна из формул $A_1, A_2, \dots, A_m$, либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих формул. Последовательность формул $D_1, D_2, \dots, D_n$ называется выводом формулы D из формул $A_1, A_2, \dots, A_m$. Если D выводима из $A_1, A_2, \dots, A_m$, то пишут $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash D$.

Очевидно, что формула, выводимая из пустого множества формул, является доказуемой. Кроме того, ясно, что если формула доказуема, то она выводима из любого множества формул.

Следующие свойства операции выводимости легко следуют из определения этой операции.

Свойства операции выводимости $\vdash$:

- 1) $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A_i$ для любого $i = \overline{1, m}$.
- 2) Если $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_1$, $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_2, \dots, A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_p$ и $B_1, B_2, \dots, B_p \vdash C$, то $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash C$.
- 3) Если $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$, то $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1} \vdash B$.
- 4) Если $A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_m \vdash B$, то $A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_m \vdash B$.

Теорема дедукции: Если Γ — некоторое конечное множество формул исчисления высказываний, A, B — произвольные формулы исчисления высказываний и $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится индукцией по длине n вывода B из множества формул Γ, A .

Базис индукции, если длина вывода $n = 1$. Возможны 3 случая:

- 1) B — аксиома,
- 2) $B = A$,
- 3) $B \in \Gamma$.

Разберем каждый случай. Построим вывод формулы $A \rightarrow B$ из Γ .

В первом и третьем случаях:

1. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (аксиома 1)
2. B (аксиома или $B \in \Gamma$)
3. $A \rightarrow B$ (MP(2,1)).

Во втором случае формула, которую требуется доказать, принимает вид $A \rightarrow A$. Это доказуемая формула (см. пример выше), значит она выводима

из любого множества формул, в частности, из Γ .

Предположение индукции: допустим, утверждение теоремы справедливо для случая, когда длина вывода B из Γ, A не превосходит n .

Шаг индукции: пусть длина вывода B из Γ, A есть $n + 1$.

В силу определения выводимости на $(n + 1)$ ом шаге возможны следующие случаи:

- 1) B — аксиома,
- 2) $B = A$,
- 3) $B \in \Gamma$,
- 4) $B = MP(P_i, P_j)$, где $1 \leq i, j \leq n$, то есть B получена по правилу Modus Ponens из формул P_i и P_j .

Доказательство для первых трех случаев проводится также, как в базисе индукции.

Рассмотрим 4 случай. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ есть вывод B из Γ, A :

1. $\Gamma, A \vdash P_1$
2. $\Gamma, A \vdash P_2$
- $\vdots$
- i. $\Gamma, A \vdash P_i$
- $\vdots$
- j. $\Gamma, A \vdash P_j$ или $\Gamma, A \vdash (P_i \rightarrow B)$
- $\vdots$
- n+1. $\Gamma, A \vdash B$.

По индукционному предположению имеем

- (α) $\Gamma \vdash A \rightarrow P_i$
- (β) $\Gamma \vdash A \rightarrow P_j$ или $\Gamma \vdash A \rightarrow (P_i \rightarrow B)$

Построим вывод $\Gamma \vdash A \rightarrow B$:

- (γ) $\Gamma \vdash (A \rightarrow P_i) \rightarrow ((A \rightarrow (P_i \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (аксиома 2)
- (δ) $\Gamma \vdash (A \rightarrow (P_i \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (MP(α, γ))
- $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ (MP(β, δ)). $\square$

Правила введения и удаления логических символов:

- 1) введение конъюнкции: $A, B \vdash A \wedge B$
- 2) введение дизъюнкции: $A \vdash A \vee B, B \vdash A \vee B$
- 3) введение импликации: если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.
- 4) введение отрицания: если $A \vdash B$ и $A \vdash \neg B$, то $\vdash \neg A$.
- 5) удаление конъюнкции: $A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$
- 6) удаление дизъюнкции: если $A \vdash C$ и $B \vdash C$, то $A \vee B \vdash C$
- 7) удаление импликации: $A, A \rightarrow B \vdash B$
- 8) удаление отрицания: $\neg \neg A \vdash A$

Доказательство:

1) введение конъюнкции:

1. $A, B \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B))$ (аксиома 5)
2. $A, B \vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (аксиома 1)
3. $A, B \vdash A$ (свойство $\vdash$)
4. $A, B \vdash A \rightarrow A$ (MP(3, 2))
5. $A, B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B)$ (MP(4, 1))
6. $A, B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (аксиома 1)
7. $A, B \vdash B$ (свойство $\vdash$)
8. $A, B \vdash A \rightarrow B$ (MP(7, 6))
9. $A, B \vdash A \rightarrow A \wedge B$ (MP(8, 5))
10. $A, B \vdash A \wedge B$ (MP(3, 9))

2) введение дизъюнкции (докажем для A , для B аналогично):

1. $A \vdash A \rightarrow A \vee B$ (аксиома 6)
2. $A \vdash A$ (свойство $\vdash$)
3. $A \vdash A \vee B$ (MP(2,3))

3) введение импликации: если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ (это теорема дедукции, доказанная ранее).

4) введение отрицания:

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ (аксиома 9)
2. $A \vdash B$ (допущение правила)
3. $\vdash A \rightarrow B$ (теорема дедукции, примененная к шагу 2)
4. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP(3, 1))
5. $A \vdash \neg B$ (допущение правила)

6. $\vdash A \rightarrow \neg B$ (теорема дедукции, примененная к шагу 4)
7. $\vdash \neg A$ (MP(6, 4)).

5) удаление конъюнкции (докажем для A , для B аналогично):

1. $A \wedge B \vdash A \wedge B \rightarrow A$ (аксиома 3)
2. $A \wedge B \vdash A \wedge B$ (свойство $\vdash$)
3. $A \wedge B \vdash A$ (MP(2,1))

6) удаление дизъюнкции:

1. $A \vee B \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$ (аксиома 8)
2. $A \vdash C$ (допущение правила)
3. $\vdash A \rightarrow C$ (теорема дедукции, примененная к шагу 2)
4. $A \vee B \vdash A \rightarrow C$ (свойство $\vdash$)
5. $A \vee B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$ (MP(4, 1))
6. $B \vdash C$ (допущение правила)
7. $\vdash B \rightarrow C$ (теорема дедукции, примененная к шагу 6)
8. $A \vee B \vdash B \rightarrow C$ (свойство $\vdash$)
9. $A \vee B \vdash A \vee B \rightarrow C$ (MP(8, 5))
10. $A \vee B \vdash A \vee B$ (свойство $\vdash$)
11. $A \vee B \vdash C$ (MP(10, 9))

7) удаление импликации: $A, A \rightarrow B \vdash B$ (это правило Modus Ponens).

8) удаление отрицания:

1. $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow A$ (аксиома 10)
2. $\neg\neg A \vdash \neg\neg A$ (свойство $\vdash$)
3. $\neg\neg A \vdash A$ (MP(2,1)) $\square$

Теорема (закон исключенного третьего): Для любой формулы исчисления высказываний A доказуема формула $A \vee \neg A$, то есть $\vdash A \vee \neg A$.

Доказательство.

1. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$ (свойство $\vdash$)
2. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$ (введение дизъюнкции)
3. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ (введение отрицания)
4. $\neg A \vdash A \vee \neg A$ (введение дизъюнкции)
5. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$ (свойство $\vdash$)
6. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$ (свойство $\vdash$)
7. $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ (введение отрицания)
8. $\vdash A \vee \neg A$ (удаление отрицания) $\square$

Исчисление предикатов

Пусть задано некоторое множество M и $A : M^n \rightarrow \{0, 1\}$ функция, которая принимает значение истина или ложь на каждом наборе значений переменных, то есть функция, которая при подстановке переменных становится высказыванием (истинным или ложным). Такие функции называют *предикатами* от соответствующего числа переменных.

Если $n = 0$, то предикат является высказыванием.

Пусть $A : M^n \rightarrow \{0, 1\}$ предикат от n переменных, тогда $\exists x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\forall x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикаты от $n - 1$ переменной, где $\exists$ и $\forall$ кванторы существования и всеобщности соответственно.

Если $A(x)$ предикат от одной переменной, заданный на множестве M , то $\exists x A(x)$ и $\forall x A(x)$ высказывания, причем $\forall x A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно для любого $x \in M$ и $\exists x A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно при некотором $x \in M$.

Переменная, не связанная никаким квантором, называется свободной. Переменная, связанная либо квантором всеобщности, либо квантором существования, называется связанной.

Язык логики предикатов:

- 1) предметные переменные. Будем их обозначать малыми латинскими буквами, возможно с индексами: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$,
- 2) логические символы $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$,
- 3) вспомогательные символы: запятая, открывающаяся скобка $($, закрывающаяся скобка $)$,
- 4) символы сигнатуры Σ , то есть
 - а) предикатные символы: $A^n(x_1, x_2, \dots, x_n), B^k(y_1, y_2, \dots, y_k), \dots$,
 - б) функциональные символы: $f^n(x_1, x_2, \dots, x_n), g^k(y_1, y_2, \dots, y_k), \dots$

Для каждого символа как предикатного, так и функционального указывается его местность, то есть число переменных, от которых он зависит. Нульместный предикатный символ называется символом высказываний, нульместный функциональный символ — символом константы.

Интерпретация. *Интерпретацией сигнатуры Σ на множестве M* называется сопоставление каждому символу из Σ некоторой функции

$f : M^n \rightarrow M$ (для функционального символа) или $A : M^n \rightarrow \{0, 1\}$ (для предикатного символа).

Модель. Моделью сигнатуры Σ называется набор $\langle M, f_1, f_2, \dots, f_n, A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$, где M — непустое множество (называемое универсумом модели), а $f_1, f_2, \dots, f_n, A_1, A_2, \dots, A_k$ — интерпретация сигнатуры Σ на этом множестве.

Терм. Понятие терма вводится индуктивно:

- 1) каждая предметная переменная — терм,
- 2) каждый символ константы — терм,
- 3) если $t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы и f — n местный функциональный символ, то $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ также терм.

Атомарная формула. Атомарной формулой называется выражение $A(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где A — n местный предикатный символ, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы.

Формула. Свободное и связанное вхождение переменной в формулу. Понятие формулы вводится индуктивно. Вместе с определением формулы, дадим определение свободной и связанной переменной:

- 1) атомарная формула есть формула, каждая предметная переменная, входящая в атомарную формулу, входит в нее свободно,
- 2) пусть A — формула, тогда $\neg A$ — формула, переменные, которые были в A свободны, в $\neg A$ также свободны, которые были в A связаны, в $\neg A$ также связаны,
- 3) пусть A и B — формулы, причем переменные, которые входят в одну из формул свободно, не могут входить в другую связано. Тогда $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ — формулы, причем свободные переменные совпадают со свободными переменными, а связанные — со связанными переменными формул A и B ,
- 4) Пусть $A(x)$ — формула, содержащая переменную x свободно, тогда $\forall x A(x), \exists x A(x)$ — формулы содержащие переменную x связано.

Формула называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных.

Формула A называется *тождественно истинной*, если она принимает значение истина на любой модели M , сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при любых значениях входящих в нее свободных переменных.

Формула A называется *выполнимой*, если она принимает значение истина на некоторой (хотя бы одной) модели M , сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при некоторых значениях входящих в нее свободных переменных.

Формула A называется *тождественно ложной*, если она принимает значение ложь на любой модели M , сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при любых значениях входящих в нее свободных переменных.

Эквивалентность формул.

Формулы A и B называются *эквивалентными на модели M* , если они принимают одинаковые истинностные значения на модели M при любых из универсума модели значениях входящих в них свободных переменных.

Формулы A и B называются *эквивалентными* (обозначается $A \sim B$), если они принимают одинаковые истинностные значения на любой модели M , сигнатура которой содержит сигнатуру формул, при любых значениях входящих в них свободных переменных.

Эквивалентные формулы логики предикатов:

- 1) $\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$
- 2) $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$
- 3) $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \sim \forall x (A(x) \wedge B(x))$
- 4) $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A(x) \vee B(x))$
- 5) $\forall x A(x) \wedge B \sim \forall x (A(x) \wedge B)$
- 6) $\exists x A(x) \wedge B \sim \exists x (A(x) \wedge B)$
- 7) $\forall x A(x) \vee B \sim \forall x (A(x) \vee B)$
- 8) $\exists x A(x) \vee B \sim \exists x (A(x) \vee B)$
- 9) $\forall x A(x) \rightarrow B \sim \exists x (A(x) \rightarrow B)$
- 10) $\exists x A(x) \rightarrow B \sim \forall x (A(x) \rightarrow B)$
- 11) $A \rightarrow \forall x B(x) \sim \forall x (A \rightarrow B(x))$
- 12) $A \rightarrow \exists x B(x) \sim \exists x (A \rightarrow B(x))$
- 13) $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \sim \exists y \forall z (A(y) \rightarrow B(z))$
- 14) $\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \sim \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$
- 15) $\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \sim \forall y \exists z (A(y) \rightarrow B(z))$
- 16) $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \sim \forall y \forall z (A(y) \rightarrow B(z))$

Пренексная (предваренная) нормальная форма.

Формула находится в *пренексной (предваренной) нормальной форме*, если она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k)$, где Q_i , $i = \overline{1, n}$, кванторы, $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k)$ формула, не содержащая кванторов.

Теорема. Для каждой формулы логики предикатов A существует эквивалентная ей формула B , находящаяся в пренексной нормальной форме.

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по количеству k логических знаков и кванторов, участвующих в построение формулы.

Базис индукции: при $k = 0$ утверждение теоремы очевидно, поскольку формула B совпадает с формулой A .

Предположение индукции: допустим, теорема доказана для формул с $\leq k$ логическими знаками и кванторами.

Шаг индукции: докажем теорему для формул с $k + 1$ логическими знаками и кванторами.

Рассмотрим последний логический знак или квантор, входящий в формулу:

- 1) $A = \neg A_1$,
- 2) $A = A_1 \vee A_2$,
- 3) $A = A_1 \wedge A_2$,
- 4) $A = A_1 \rightarrow A_2$,
- 5) $A = \exists x A_1(x)$,
- 6) $A = \forall x A_1(x)$,

причем формулы A_1, A_2 содержат $\leq k$ логических знака и квантора и для них теорема доказана. Значит, для них существуют эквивалентные формулы, находящиеся в пренексной нормальной форме. Обозначим их через B_1, B_2 : $A_1 \sim B_1$ и $A_2 \sim B_2$. Можно считать, что связанные переменные, входящие в формулу B_1 , не совпадают со связанными переменными, входящими в формулу B_2 (иначе их можно переименовать).

Пусть B_1, B_2 имеют вид:

$$B_1 = Q_1y_1Q_2y_2\ldots Q_ny_nC_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, u_1, u_2, \ldots, u_l),$$

$$B_2 = R_1z_1R_2z_2\ldots R_mz_mC_2(z_1, z_2, \ldots, z_m, v_1, v_2, \ldots, v_l),$$

где $C_1(y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_{l_1}), C_2(z_1, z_2, \dots, z_m, v_1, v_2, \dots, v_{l_2})$ формулы, не содержащие кванторов. Чтобы не загромождать запись, будем писать просто C_1, C_2 , не указывая переменные.

В каждом из 6 случаев построим формулу, эквивалентную A и находящуюся в пренексной нормальной форме, используя эквивалентности логики предикатов. Последняя формула в цепочке эквивалентностей находится в пренексной нормальной форме.

1) $A = \neg A_1 \sim \neg B_1 \sim Q'_1 y_1 Q'_2 y_2 \dots Q'_n y_n \neg C_1$, где

$$Q'_i = \begin{cases} \exists, & \text{если } Q_i = \forall, \\ \forall, & \text{если } Q_i = \exists \end{cases}.$$

2) $A = A_1 \vee A_2 \sim B_1 \vee B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1 \vee R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m C_2 \sim \sim Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m (C_1 \vee C_2)$.

3) $A = A_1 \wedge A_2 \sim B_1 \wedge B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1 \wedge R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m C_2 \sim \sim Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m (C_1 \wedge C_2)$.

4) $A = A_1 \rightarrow A_2 \sim B_1 \rightarrow B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1 \rightarrow R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m C_2 \sim \sim Q'_1 y_1 Q'_2 y_2 \dots Q'_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m (C_1 \rightarrow C_2)$.

5) $A = \exists x A_1(x) \sim \exists x B_1(x) = \exists x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1$.

6) $A = \forall x A_1(x) \sim \forall x B_1(x) = \forall x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1$. $\square$