Лекция 4. Замкнутые классы булевых функций. Многочлены Жегалкина. Метод неопределенных коэффициентов. Метод «треугольника Паскаля». Теорема Поста. Предполные классы. Двойственные и самодвойственные функции. Монотонные функции. Критерий полноты системы булевых функций.

Функционально полные системы булевых функций

Замкнутые классы булевых функций

Выше показано, что любая функция может быть выражена в виде ДНФ, т.е. формулой, использующей функциональные знаки $\{\cdot, \vee, \neg\}$ и символы переменных. Еще один интересный пример дает система функций

$$\{1, X\oplus Y, X\&Y\}. \qquad (1)$$

Выше показано, что $\overline{X} = X \oplus 1$. Используя это равенство и закон де Моргана (свойство 11), выразим дизъюнкцию через функции системы (1).

$$X \vee Y = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}} = (X \oplus 1) \cdot (Y \oplus 1) \oplus 1 = XY \oplus X \oplus Y \oplus 1 \oplus 1 = XY \oplus X \oplus Y$$

Поэтому в любой ДНФ можно выразить дизъюнкцию и отрицание через функции системы (1).

Таким образом, любую функцию можно представить в виде формулы, представляющей сумму по модулю 2 некоторых конъюнкций переменных (в каждой конъюнкции переменные не повторяются, но, в отличие от элементарных конъюнкций – без отрицаний) и, быть может, константы 1.

Полученная формула, порожденная логическими константами 0 и 1 и функциями и называется **многочленом Жегалкина**. Можно показать, что различные (с точностью до перестановки слагаемых в сумме и сомножителей в конъюнкциях) многочлены представляют различные функции, т.е. имеет место единственность представления булевой функции многочленом Жегалкина.

Упражнение. Булеву функцию $f = X \cdot \overline{Y} \vee Y \cdot Z \vee \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$ выразить многочленом Жегалкина. Проверить принадлежность функции f классу L линейных функций.

1. Построить многочлен Жегалкина.

a) Заменить подформулы, использующие $\vee$, их выражениями в базисе Жегалкина, т.е. через &, ⊕, ¬

Сначала выделим дизъюнкцию двух первых членов $f_1 = X \cdot \overline{Y} \vee Y \cdot Z$. Преобразуем, f_1 применяя выражения дизъюнкции в базисе Жегалкина: $A \vee B = A \oplus B \oplus A \cdot B$ не заменяя пока $\overline{Y}$ на (Y⊕1):

$f_1 = X \cdot \overline{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus X \cdot \overline{Y} \cdot Y \cdot Z$

Если сомножетели A и B содержат общие переменные, то произведение A· B следует упростить используя равенства: $T \cdot T = T$, $\overline{T} \cdot \overline{T} = \overline{T}$, $T \cdot \overline{T} = 0$

В нашем примере последнее слагаемое тождественно равно 0, так как содержит одновременно $\overline{Y}$ и Y.

Таким образом, $f_1 = X \cdot \overline{Y} \oplus Y \cdot Z$

b) Раскрыть скобки по правилу перемножения многочленов

Поскольку $f = f_1 \vee \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$, выразим теперь эту дизъюнкцию в базисе Жегалкина:

$$f = f_1 \oplus \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \oplus f_1 \cdot (\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}) = X \cdot \overline{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \oplus (X \cdot \overline{Y} \oplus Y \cdot Z) \cdot \overline{Z} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} =$$

[раскрываем скобки в последнем слагаемом] =

$$X \cdot \overline{Y} \oplus Y \cdot Z \oplus \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \oplus X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \oplus Y \cdot Z \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$$

Два последних слагаемых тождественно равны 0, так как содержат переменную и ее отрицание (в первом-Y, во втором-Z). Таким образом,

$$f = X \cdot \overline{Y} \cdot \oplus Y \cdot Z \oplus \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$$

c) Сократить пары равных слагаемых и упорядочить оставшиеся члены, в первую очередь, по их степеням, а внутри в алфавитном порядке переменных

Теперь заменяем знак отрицания: каждый член $\overline{A}$ на $(A \oplus 1)$

$$f = X \cdot (Y \oplus 1) \oplus Y \cdot Z \oplus (X \oplus 1) \cdot (Y \oplus 1) \cdot (Z \oplus 1)$$

$$f = X \cdot Y \oplus X \oplus Y \cdot Z \oplus Y \cdot Z \oplus X \cdot Y \cdot Z \oplus X \cdot Y \oplus X \cdot Z \oplus Y \cdot Z \oplus X \oplus Y \oplus Z \oplus 1$$

После сокращений A ⊕ A = 0 получаем:

$$f = X \cdot Y \cdot Z \oplus X \cdot Z \oplus Y \oplus Z \oplus 1$$

2. Проверим принадлежность функции f классу L линейных функций. Определим слагаемое наибольшей степени: если степени всех слагаемых не превышают 1 (т.е. формула не содержит конъюнкций; все слагаемые - переменные или константа 1) то функция линейна. Для функции f – старшая степень слагаемого равна 3; следовательно, функция нелинейная.

Самостоятельные задания.

Преобразовать формулы в многочлен Жегалкина.

1. $X \cdot \overline{Y} \vee Y \cdot Z \vee \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$
2. $\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z \vee X \cdot Z$

3. $X \cdot \overline{Y} \to X \cdot Y \cdot \overline{Z}$
4. $\overline{X} \cdot Y \vee X \cdot \overline{Z} \vee \overline{Y} \cdot \overline{Z}$
5. $(Y \to X) \vee (X \to Z) \vee (Z \to Y)$

Замыкание системы булевых функций ***D*** – класс всех суперпозиций функций системы ***D***.

Замкнутый класс булевых функций – множество функций K , любая суперпозиция которых принадлежит K, т.е. замкнутый класс представляет собой множество булевых функций, замкнутое относительно операции суперпозиции.

Функционально полная система функций – система, замыкание которой составляет P_2 – множество всех логических функций.

Как показано выше, системы функций $\{X\&Y,\ X \vee Y,\ \neg X\}$ и $\{1,\ X\&Y,\ X \oplus Y\}$ полны.

Можно обобщить построения, примененные при рассмотрении полноты систем многочленов Жегалкина, и сформулировать следующее утверждение.

Пусть система $\{f_1,\dots,f_k\}$ - полная и пусть каждая из функций f_1 может быть выражена суперпозицией через функции $g_1, \dots, g_m$.

Тогда система $\{g_1, \dots, g_m\}$ тоже полная, потому что в формуле, составленной из функциональных знаков системы $\{f_1,\dots,f_k\}$ можно заменить каждое вхождение символа функции f_1 на ее выражение через символы функций $\{g_1, \dots, g_m\}$.

Вот несколько примеров.

(1) Система $\{\neg,\vee\}$ полна, так как $X\&Y=\neg(\neg X\vee\neg Y)$ (закон де Моргана).

(2) Аналогично показывается полнота системы $\{\neg,\&\}$.

(3) Система $\{\to,\neg\}$ полна, поскольку $X\vee Y=\neg X\to Y$.

Предполные классы

1) **Класс** $\mathbf{T}_0$ – класс функций, сохраняющих 0, т.е. функций, для которых $f(0,0,\dots,0) = 0$. Замкнутость класса T_0 очевидна: если в функцию $Z=f(X_1,X_2,\dots,X_m)$ вместо некоторых переменных подставить функции, принадлежащие T_0, то на нулевом наборе аргументов все они имеют значение 0, и для внешней функции f набор ее переменных будет также нулевым, откуда $Z = 0$.

2) **Класс** $\mathbf{T}_1$ – класс функций, сохраняющих 1, т.е. функций, для которых $f(1, 1,\dots,1) =1$. Замкнутость T_1 устанавливается аналогично предыдущему.

Примерами функций, принадлежащих классам T_0 и T_1, служат функции X&Y и X∨Y ; отрицание ¬X не принадлежит ни T_0 ни T_1 ; функция X⊕Y принадлежит T_0 , но не принадлежит T_1 ; импликация X→Y напротив, не принадлежит T_0, но принадлежит T_1 .

3) Для определения следующего класса введем понятие двойственности. **Двойственная функция** для функции $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ – функция $Z^* = \overline{f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_n})}$. Если на наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1 \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ функция f принимает значение α , то двойственная ей функция f^* на противоположном наборе $\overline{\tilde{\sigma}} = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ принимает противоположное значение $\overline{\alpha}$.

Для булевых функций справедлив **принцип двойственности** – если в формуле F , представляющей функцию f , все знаки функций заменить соответственно на знаки двойственных функций, то полученная формула F^* будет представлять функцию f^* , двойственную f .

Класс S самодвойственных функций – то есть функций таких, что $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Подмножеством множества многочленов является **класс L линейных функций** – функции вида $X_{i1} \oplus X_{i2} \oplus \ldots \oplus X_{in} \oplus \sigma$. Здесь $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_n}$ – переменные , σ – булева константа (0 или 1).

5) Введем отношение частичного порядка для булевых векторов: X≤Y (где X=($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) , Y=($\beta\ \beta_2, \ldots, \beta_n$)– если $\alpha_i \le \beta_i$ для I=1,2,…,n. Заметим, что для булевых переменных строгое неравенство $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha = 0, \beta = 1$, поскольку других возможностей нет. Равенство $\alpha = \beta$ добавляет варианты $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = \beta = 1$. Поэтому неравенству $\alpha \le \beta$ удовлетворяют 3 пары (α, β): (0, 0), (0, 1), (1, 1) и не удовлетворяет только пара (1, 0). Можно заметить, что ($\alpha \le \beta$) эквивалентно ($\alpha \to \beta$).

Класс M монотонных функций – это класс функций таких, что если X≤ Y , то f(X)≤ f(Y) , т.е. функция на большем наборе принимает не меньшее значение.

Среди заданных в табл.6 функций двух существенных переменных монотонными являются конъюнкция и дизъюнкция.

Критерий полноты системы булевых функций

Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста) – система ∑ полна в том и только в том случае, если для каждого из классов T_0 ,

T_1 ,S, L, M в системе существует функция, не принадлежащая этому классу; иначе говоря, система $\sum$ полна, если выполнены 5 условий:

1) в системе $\sum$ есть $f_1 \notin T_0$,

2) в системе $\sum$ есть $f_2, \notin T_{1,}$

3) в системе $\sum$ есть $f_3, \notin S$,

4) в системе $\sum$ есть $f_4 \notin L$,

5) в системе $\sum$ есть $f_5 \notin M$.

Функции – не обязательно различные.