

Лекция 3. Булевы функции. Представления логических функций. Логические формулы. Эквивалентные формулы. Булева алгебра. Соотношения между булевой алгеброй и алгеброй Кантора. Дизъюнктивные нормальные формы. Конъюнктивные нормальные формы.

Булевы функции

Логические переменные – это переменные, принимающие значения из двухэлементного множества $B\{0;1\}$. Они называются также **булевыми**, или **двоичными** переменными.

Булева функция (логическая функция, функция алгебры логики) – это функция одной или нескольких переменных $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где $f_S(X_1, X_2, \dots, X_n)$, Z – логические переменные, т.е. и значения аргументов, и значение функции – ноль или единица. Тем самым, булева функция n переменных есть функция на B^n – множестве n -мерных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, компоненты которых равны 0 или 1: $\sigma_i \in B$.

Для задания логической функции нужно указать каким-либо образом, какое значение принимает функция на тех или иных наборах значений аргументов. Поэтому естественным является **табличное представление булевых функций**.

Следующая таблица содержит все булевы функции двух переменных.

Таблица 1

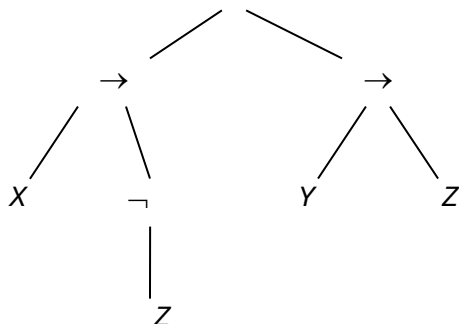
X	Y	g ₀	g ₁	g ₂	g ₃	g ₄	g ₅	g ₆	g ₇	g ₈	g ₉	g ₁₀	g ₁₁	g ₁₂	g ₁₃	g ₁₄	g ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция	Формула	Название
g ₀ =	0	константа 0
g ₁ =	$X \& Y = X \cdot Y$	конъюнкция
g ₂ =	$\neg(X \rightarrow Y) = X \& \neg Y$	отрицание импликации
g ₃ =	X	первая переменная
g ₄ =	$\neg(Y \rightarrow X) = \neg X \& Y$	отрицание обратной импликации
g ₅ =	Y	вторая переменная
g ₆ =	$X \oplus Y = \neg X \& Y \vee X \& \neg Y$	сумма по модулю 2
g ₇ =	$X \vee Y$	дизъюнкция
g ₈ =	$\neg(X \vee Y) = \neg X \& \neg Y$	отрицание дизъюнкции
g ₉ =	$X \sim Y = \neg X \& \neg Y \vee X \& Y$	эквивалентность
g ₁₀ =	$\neg Y$	отрицание второй переменной
g ₁₁ =	$Y \rightarrow X = X \vee \neg Y$	обратная импликация
g ₁₂ =	$\neg X$	отрицание первой переменной
g ₁₃ =	$X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$	импликация
g ₁₄ =	$X Y = \neg X \vee \neg Y = \neg (X \& Y)$	штрих Шеффера
g ₁₅ =	1	константа 1

Упражнение. Построить таблицу истинности для булевой функции, заданной логической формулой

$f(X, Y, Z) = (X \rightarrow \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)$. Произвести разложение функции по переменной X .

Решение. Функция f зависит от трех переменных. Построим иерархическую схему, определяющую порядок действий:



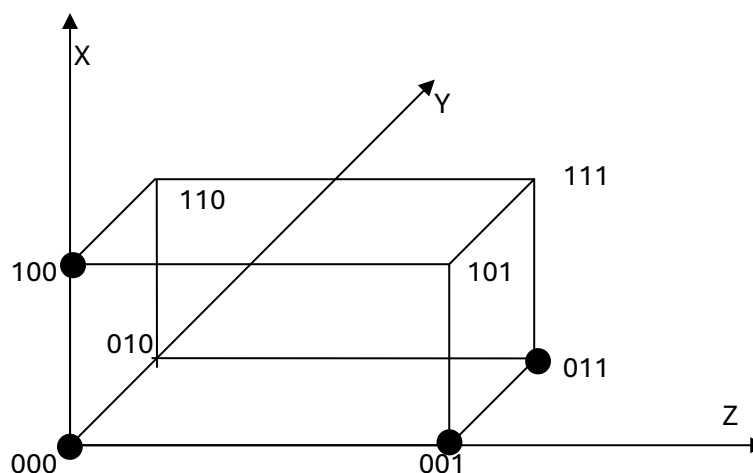
Построим таблицу наборов значений переменных в лексико-графическом порядке. Присоединим к ней справа столбцы для вычисления значений промежуточных функций, выражаемых подформулами, в последовательности, определяемой иерархической схемой. Последовательно для каждой строки таблицы вычислим значения промежуточных функций, начиная с внутренних, пользуясь таблицами истинности основных логических функций:

X	Y	Z	$\neg Z$	$X \rightarrow \neg Z$	$Y \rightarrow Z$	f
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0

Произведем разложение функции по первой переменной X .

$$f(X, Y, Z) = \bar{X} \cdot [1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \vee X \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T = \bar{X} \cdot (Y \rightarrow Z) \vee X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$$

Изобразим функцию на единичном кубе:



Эквивалентные (равносильные) формулы – формулы представляющие одну и ту же формулу.

Примеры эквивалентных формул

№ п/п	Формула	№ п/п	Формула
1.	$X \vee Y = Y \vee X$	2.	$X \wedge Y = Y \wedge X$
3.	$(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$	4.	$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$
5.	$(X \vee Y) \wedge Z = (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$	6.	$(X \wedge Y) \vee Z = (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
7.	$X \vee X = X$	8.	$X \wedge X = X$
9.	$X \vee (X \wedge Y) = X$	10.	$X \wedge (X \vee Y) = X$
11.	$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$	12.	$\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$
13.	$\neg X \vee X = 1$	14.	$\neg X \wedge X = 0$
15.	$0 \vee X = X$	16.	$0 \wedge X = 0$
17.	$1 \vee X = 1$	18.	$1 \wedge X = X$
19.	$\neg 0 = 1 \quad (\neg 1 = 0)$	20.	$\neg(\neg X) = X$
21.	$X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y = X$	22.	$X \vee \neg X \wedge Y = X \vee Y$

Конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание можно рассматривать как алгебраические операции над булевыми функциями. Свойства 1-2 выражают коммутативность, свойства 3-4 – ассоциативность операций $\vee$ и $\wedge$; свойства 5-6 – взаимную дистрибутивность этих операций, что дает возможность раскрывать скобки в формулах. Свойства 7-8 – устранение кратности; свойства 9-10 называют **правилами поглощения**; они являются следствиями остальных свойств, что показано ниже. Свойства 11-12 – законы де Моргана. Свойство 13 называют законом исключенного третьего; свойство 14 – законом противоречия. Свойства 15-19 характеризуют основные операции над переменной и константами 0 и 1. Свойство 20 – снятие двойного отрицания. Свойства 21-22 называются **правилами склеивания**.

Совокупность всех булевых функций P_2 с тремя данными операциями есть алгебра $(P_2 ; \wedge; \vee; \neg)$. Она называется алгеброй булевых функций, алгеброй логики, а также **булевой алгеброй**. Сравнивая свойства 1-21 для булевых функций со свойствами 1-21 Лекции 2 для алгебры множеств, приходим к следующему результату.

Соотношение между булевой алгеброй и алгеброй Кантора есть изоморфизм, порождаемый соответствием между подмножествами конечного n -элементного множества M и n -мерными булевыми векторами вместе с соответствием между операциями объединения, пересечения, дополнения для множеств и операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания для векторов. При этом соответствии сохраняются все свойства операций, их определяющие.

Вследствие описанного изоморфизма всякую алгебру, которая обладает свойствами 1-21, называют булевой алгеброй. Кроме алгебры Кантора и алгебры логических функций, булевой алгеброй является, например, алгебра случайных событий в теории вероятностей.

Обратите внимание, что равенства 7-10, 13-18 и 21-22 содержат в правой части меньше символов (более короткие формулы), чем в левой. Поэтому применение этих эквивалентностей позволяет осуществлять преобразования, в частности, упрощения формул, выражать одни из функций через другие; некоторые примеры такого рода уже встречались.

Возникают естественные вопросы:

- (1) можно ли суперпозициями функций одной-двух переменных выразить **любую** функцию большего числа переменных;
- (2) как это сделать, если это возможно.

Ответ на эти вопросы – в следующем разделе.

Дизъюнктивные нормальные формы

Важным примером эквивалентности является **разложение булевой функции по переменной** – представление функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в виде

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}_1 \cdot f(0, X_2, \dots, X_n) \vee X_1 \cdot f(1, X_2, \dots, X_n).$$

Справедливость этого тождества следует из того, что оба слагаемых, связанных знаком дизъюнкции, не могут одновременно равняться 1, так как один из сомножителей $\bar{X}_1$ или X_1 равняется 0. При подстановке в левую часть равенства константы 0 на место X_1 второе слагаемое в правой части обращается в 0, а при подстановке константы 1 – первое.

Функции $(n-1)$ переменных $f(0, X_2, \dots, X_n)$ и $f(1, X_2, \dots, X_n)$ имеют в качестве столбцов значений соответственно верхнюю и нижнюю половины столбца значений $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Например, справедливо равенство

$$m_3(X, Y, Z) = \bar{X} \cdot (Y \cdot Z) \vee X \cdot (Y \vee Z) = \bar{X} \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot Y \vee X \cdot Z.$$

В каждом из слагаемых функции от переменных $X_2, \dots, X_n$ могут быть таким же образом разложены по переменному X_2 и т.д.

Элементарная конъюнкция – конъюнкция нескольких переменных и их отрицаний, в которую каждая переменная входит не более одного раза.

Элементарная конъюнкция, соответствующая набору $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ – конъюнкция $X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot X_n^{\sigma_n}$. Для n -мерного набора конъюнкция содержит ровно n множителей с отрицаниями или без них. Как функция n переменных она принимает значение 1 только на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – представление функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в виде дизъюнкции всех элементарных конъюнкций, соответствующих наборам значений $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на которых $Z=1$:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1} X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot X_n^{\sigma_n}$$

СДНФ содержит ровно столько n -членных элементарных конъюнкций, сколько единиц в столбце значений функции $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. На каждом из 2^n

наборов либо все логические слагаемые СДНФ обращаются в 0 (если функция f на этом наборе равна 0), либо ровно одна конъюнкция обращается в 1 (если f равна 1). Не имеет СДНФ единственная функция – тождественно равная нулю (константа 0).

Отсюда – простой способ выражения любой функции (кроме константы 0), заданной таблично, в виде СДНФ. По таблице значений составляются соответствующие элементарные конъюнкции и связываются знаком дизъюнкции.