

**Лекция 2.** Бинарные отношения. Отношения эквивалентности. Отношения порядка. Элементы общей алгебры. Свойства бинарных операций. Транзитивное замыкание бинарных отношений. Понятие Булеана. Операции на множестве. Замкнутые множества относительно заданной операции. Упорядочение множеств. Лексикографическое упорядочение множеств.

### Бинарные отношения.

Пусть задано непустое множество  $M$ .  **$n$ -арное ( $n$ -местное) отношение на множестве  $M$**  – подмножество  $R \subseteq M^n$ ; обозначение –  $R(m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Говорят, что элементы, составляющие кортеж  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  находятся в отношении  $R$ , причем это свойство не отдельных элементов, а именно их совокупности. Полезно рассматривать и одноместное (унарное) отношение – оно называется признаком, или свойством элементов множества. В более общем смысле  $n$ -арное отношение можно определить и для совокупностей элементов различных множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  как подмножество  $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ . Число  $n$  называется **арностью**, или **местностью** отношения. Чаще других используется случай  $n = 2$ .

**Бинарное (двуместное) отношение** – множество пар  $(a, b) \in R \subseteq M_1 \times M_2$ ; обозначение  $R(a, b)$  – или  $aRb$  – элементы  $a$  и  $b$  находятся в отношении  $R$ .

**Примеры.** 1) Отношение равенства между двумя или несколькими числами, фигурами, множествами.

2) Бинарное отношение старшинства между людьми по возрасту или воинскому званию.

3) Бинарные родственные и другие отношения между людьми “быть отцом”, “быть внуком”, “быть одноклассниками”.

4) Трехместное (**тернарное**) отношение “между” для тройки точек  $(A, B, C)$  на прямой: точка  $A$  расположена между точками  $B$  и  $C$ .

5) Тернарное отношение для тройки точек на плоскости – “лежать на одной прямой”.

6) Четырехместное отношение для точек пространства – “принадлежать одной плоскости”.

7) Четырехместное отношение для чисел – “быть пропорциональными”, т.е. удовлетворять соотношению  $X/Y = Z/T$ .

8) Бинарное отношение между целыми числами – “иметь одинаковые остатки от деления на 7”.

Еще один важный пример – отношение включения для множеств.

**Булеан** – множество всех подмножеств множества  $E$ . Булеан  $B(E)$  обозначается также  $2^E$ . Если  $M, N$  – подмножества  $E$  и  $M$  есть подмножество множества  $N$ , то  $(M \subseteq N)$  – бинарное отношение на  $B(E)$ .

Отношение  $ARB$  можно рассматривать и как совокупность всех высказываний вида “элемент  $a \in A$  находится в отношении с элементом  $b \in B$ ”. Поэтому для отношений содержательными являются определяемые естественным образом логические операции или связки: дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, которые порождают составные отношения.

**Инверсией** бинарного отношения  $R$  называется отношение, обозначаемое  $R^{-1}$  и такое, что  $aR^{-1}b$  тогда и только тогда, когда  $bRa$ . Понятно, что инверсией отношения  $R^{-1}$  является отношение  $R$ , т.е. можно сказать, что отношения  $R$  и  $R^{-1}$  взаимно обратны.

**Пример.** Инверсией для отношения “больше” является отношение “меньше”; то же – для их разновидностей: старше – моложе, дороже – дешевле, выше – ниже и т.п.

Обратимся теперь к некоторым типам отношений, обладающих свойствами, которые представляют особый интерес.

**Рефлексивное** (соответственно, **антирефлексивное**) **отношение** – бинарное отношение, обладающее свойством  $a: aRa$  (соответственно,  $a \bar{R} a$ ).

**Симметричное отношение** – бинарное отношение, обладающее свойством  $a, b: aRb \rightarrow bRa$  (т.е. из  $aRb$  следует  $bRa$ ).

**Антисимметричное отношение** – бинарное отношение такое, что  $\forall a, b$ : если  $a \neq b$ , то  $aRb \rightarrow b \bar{R} a$  – т.е. если  $a$  и  $b$  – в этом порядке! – находятся в отношении  $R$ , то  $b$  и  $a$  – нет.

**Транзитивное отношение** – бинарное отношение, обладающее свойством  $a, b, c: aRb \ \& \ bRc \rightarrow aRc$ .

**Примеры.** 1) Отношения “больше” и “меньше” транзитивны.

2) Отношение параллельности прямых транзитивно.

3) Отношения равенства транзитивны.

4) Отношения “правее”, “левее” между делениями на линейной шкале прибора.

5) Отношения “севернее”, “южнее” между точками земной поверхности.

**Примеры нетранзитивных отношений.**

1) Отношение перпендикулярности прямых.

2) Известное из истории европейского средневековья отношение между вассалом и сюзереном, выражавшееся формулой: “вассал моего вассала – не мой вассал”.

3) Отношения “западнее”, “восточнее” между точками земной поверхности: Ярославль ( $40^\circ$  восточной долготы) западнее Хабаровска ( $135^\circ$  восточной долготы); Хабаровск западнее Торонто ( $80^\circ$  западной долготы), но Ярославль восточнее Торонто.

**Транзитивное замыкание** бинарного отношения  $R$  есть бинарное отношение  $\hat{R}$  такое, что  $a \hat{R} b$  (т.е.  $a, b$  элементы находятся в отношении  $\hat{R}$ ), если существует цепочка  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , для которой  $a R c_1, c_1 R c_2, \dots, c_k R b$ . Например, для отношения “быть сыном” транзитивным замыканием является отношение “быть прямым потомком по мужской линии”. Для отношения на множестве квартир дома “иметь общую стену” транзитивное замыкание – это отношение “находиться на одном этаже”. Отношение  $\hat{R}$ , конечно, транзитивно.

**Отношение эквивалентности** – бинарное отношение, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным.

**Примеры.** 1) Рассмотренные выше отношения равенства, параллельности прямых.

2) Отношение подобия треугольников.

3) Отношение между элементами множества всех многоугольников: “иметь одинаковое число сторон”.

Каждое отношение эквивалентности на множестве  $M$  порождает разбиение этого множества на **классы эквивалентности бинарного отношения  $R$  на множестве  $M$**  – систему подмножеств множества  $M$  такую, что

1) любые два элемента из одного класса эквивалентны;

2) любые два элемента из разных классов не эквивалентны.

Верно и обратное. Любое разбиение множества  $M$  можно рассматривать как отношение эквивалентности, в котором находятся пары элементов, отнесенные к одному и тому же классу разбиения, и не находятся элементы из разных классов.

Важный тип бинарных отношений – отношения порядка.

**Отношение строгого порядка** – бинарное отношение, являющееся антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным: обозначение  $a \hat{<} b$  – ( $a$  предшествует  $b$ ). Примерами могут служить отношения “больше”, “меньше”, “старше” и т.п. Для чисел обычное обозначение – знаки “<”, “>”.

**Отношение нестрогого порядка** – бинарное рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение. Наряду с естественными примерами нестрогих неравенств для чисел примером может служить отношение между точками плоскости или пространства “находиться ближе к началу координат”. Нестрогое неравенство для целых и действительных чисел можно также рассматривать как дизъюнкцию отношений равенства и строгого порядка.

Задание для множества некоторого отношения порядка называется его **упорядочением**, а само множество в результате этого становится **упорядоченным**.

Если для отношения порядка  $R$  на множестве  $M$  и некоторых различных элементов  $a, b \in M$  выполняется хотя бы одно из отношений  $aRb$  или  $bRa$ , то  $a$  и  $b$  называются **сравнимыми**; в противном случае – **несравнимыми**.

**Полностью (или линейно) упорядоченное множество**  $M$  – множество, на котором задано отношение порядка, причем любые два элемента множества  $M$  сравнимы; **частично упорядоченное множество** – то же, но допускаются пары несравнимых элементов.

**Алфавит** – это кортеж попарно различных символов, называемых буквами алфавита. Примером служит алфавит любого европейского языка, а также алфавит из 10 арабских цифр. В компьютере клавиатура и некоторые вспомогательные средства определяют алфавит допустимых символов.

**Слово в алфавите**  $A$  – кортеж из символов алфавита  $A$ . Слово записывается символами алфавита подряд, слева направо, без пробелов. Натуральное число является словом в цифровом алфавите. Формула не всегда является словом из-за нелинейного расположения символов: наличие надстрочных (показатели степени) и подстрочных (индексы переменных, основания логарифмов) символов, дробная черта, знаки радикалов и др.; однако путем некоторых соглашений она может быть приведена к записи в строку, что и применяется, например, в компьютерном программировании (так, знак возведения в степень записывается как 2 знака умножения подряд:  $5^{**3}$  означает третью степень числа 5).

**Лексико-графическое (алфавитное) упорядочение** – для различных слов  $\alpha, \beta$  в алфавите  $A$  с упорядоченными символами  $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$  устанавливается упорядочение:  $\alpha \prec \beta$ , если возможно представление  $\alpha = \gamma a_i \delta'$ ,  $\beta = \gamma a_j \delta''$ , при котором либо  $a_i \prec a_j$  (подслово  $\gamma$  может быть пустым), либо

$a_i = a_j$  и  $\delta' \prec \delta''$  – пустое подслово. В этом определении  $\gamma$  – префикс (начальное подслово), одинаковый у обоих слов  $\alpha, \beta$ ;  $a_i$  и  $a_j$  – либо первые по счету слева различные символы, либо  $a_i$  – последний символ в слове  $\alpha$ ;  $\delta'$ ,  $\delta''$  – хвостовые подслова.

Таким образом, алфавитное упорядочение слов определяется первым слева различающим их символом (например, слово КОНУС предшествует слову КОСИНУС, поскольку они впервые различаются в третьей букве, и Н предшествует С в русском алфавите). Считается также, что символ пробела предшествует любому символу алфавита – для случая, когда одно из слов является префиксом другого (например, КОН и КОНУС).

Пусть  $A$  – частично упорядоченное множество. Элемент  $a \in A$  называется **максимальным** в  $A$ , если не существует элемента  $b$ , для которого  $a < b$ . Элемент  $a$  называется **наибольшим** в  $A$ , если для всякого отличного от  $a$  элемента  $b$  выполнено  $b < a$ . Симметричным образом определяются **минимальный и наименьший** элементы.

### Операции на множестве

**$n$ -арная операция на множестве  $M$**  – отображение  $\varphi$  типа:  $M^n \rightarrow M$ , где  $M$  – произвольное множество, не обязательно числовое; обозначение:  $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_n) = m$ .

Частным случаем  $n$ -арной операции, когда  $M$  – числовое множество, является  $n$ -местная функция. Если же  $M$  – множество функций, то употребляют термин **оператор**: примером могут служить операторы дифференцирования функции одной или нескольких действительных переменных, ставящие в соответствие каждой функции ее производную или частную производную.

**Множество  $M$  называется замкнутым относительно операции  $\varphi$** , если выполнено условие  $\forall a \in M: \varphi(a) \in M$ , т.е. применение операции не выводит за пределы множества  $M$ .

**Примеры.** 1) Множества действительных, рациональных, целых чисел замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения, причем первые два множества замкнуты и относительно операции деления (исключая деление на 0). Множество целых чисел не замкнуто относительно деления.

2) Множество четных целых чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения: сумма и произведение четных чисел также четны. Напротив, множество нечетных чисел не замкнуто относительно тех же операций.

### Свойства бинарных операций

**Ассоциативной бинарной операцией** называется операция, если она обладает свойством  $(a \varphi b) \varphi c = a \varphi (b \varphi c)$ , Ассоциативность позволяет записывать последовательность таких операций без скобок:  $a \varphi b \varphi c$ .

**Коммутативной бинарной операцией** называется операция, обладающая свойством перестановочности:  $a \varphi b = b \varphi a$ .

**Дистрибутивность слева бинарной операции  $\varphi$  относительно бинарной операции  $\psi$**  – свойство, состоящее в том, что  $a \psi (b \varphi c) = (a \varphi b) \psi (a \varphi c)$ .

**Дистрибутивность справа бинарной операции  $\varphi$  относительно бинарной операции  $\psi$**  – свойство, состоящее в том, что  $(a \psi b) \varphi c = (a \varphi c) \psi (b \varphi c)$ .