

Лекция 1

Тема лекции. Предмет математической логики дискретной математики. Множества. Понятие множества, способы задания множеств. Порождающие процедуры. Рекуррентные формулы. Операции над множествами. Алгебра Кантора. Декартово произведение множеств. Определение функции и построение сложных функций. Суперпозиция функций. Функциональные соответствия и отношения. Схема из функциональных элементов. Характеристическая функция множеств

Цель лекции. Знакомство с предметом и основными понятиями дискретной математики, а также определение взаимосвязи с элементами общей алгебры.

Введение. Предмет дискретной математики.

Дискретная математика (ДМ), или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованиями структур и задач на конечных множествах. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин “конечная математика”. Можно считать общепринятым деление математики на континуальную (непрерывную) и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности. Поэтому для задач ДМ обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

ДМ – самостоятельное направление современной математики. ДМ изучает математические модели объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, с которыми имеют дело в технике, информатике и других областях знаний.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная модель.

Сегодня ДМ является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

Знание дискретной математики необходимо для создания и эксплуатации интегрированных систем обработки информации и их компонент (математического обеспечения, пакетов прикладных программ, распределенных баз данных, сетей передачи данных, систем с разделением ресурсов и распределенной обработкой информации).

В широком смысле ДМ включает в себя такие сложившиеся математические разделы, как теория множеств и отношений, математическая логика, комбинаторный анализ, а также ряд других, которые стали развиваться наиболее интенсивно в связи с внедрением вычислительной техники. В узком смысле ДМ ограничивается только этими новыми разделами, к которым

относятся: теория функциональных систем, теория графов, теория автоматов, теория кодирования, теория алгоритмов и др.

Еще в доньютоновский период появились простейшие понятия комбинаторики (П.Ферма, Б.Паскаль, Франция, XVIII в.). Комбинаторика возникла как основа дискретной теории вероятностей в связи с исследованиями в области азартных игр. Л.Эйлер в середине XVIII в. закладывает основы теории графов; в середине XIX в. Дж. Буль, опираясь на некоторые идеи Г.Лейбница, придумывает свою “универсальную алгебру” в продолжение наметившегося еще в средние века стремления к формализации Аристотелевой логики. Конец XIX в., характеризующийся, с одной стороны, обобщающе-синтетическим подходом к различным разделам математики, а с другой – стремлением к строгости математических обоснований, дает толчок к созданию и быстрому расцвету математической логики.

Основным поставщиком задач и идей для ДМ в XX в. становится кибернетика, а универсальным вычислительным средством – ЭВМ. Задачи анализа и конструирования сложных систем послужили стимулом для разработки теории графов; задачи хранения, обработки и передачи информации привели к теории кодирования (дискретной теории информации); задачи оптимизации вызвали появление дискретного программирования (методы исследования и решения экстремальных задач на конечных множествах); исследование основных понятий вычислительной математики – вычислимости и алгоритма – стимулировало появление теории алгоритмов и теории сложности.

Функциональные соответствия и отношения. Операции над множествами.

Множество может быть задано перечислением его элементов, либо указанием характерного свойства, которым обладают элементы множества и только они.

Определить, обладает ли тот или иной объект заданным свойством и тем более найти все такие объекты, может быть сложной задачей. Например, найти множество корней уравнения означает решить уравнение. Решение вопроса о том, существует ли процедура распознавания тех или иных свойств математических объектов, относится к проблемам теории алгоритмов.

Кроме того, множество может определяться с помощью операций объединения, пересечения, дополнения до универсального множества, а также разности двух множеств.

Еще один способ задания множества связан с понятием **порождающей процедуры**.

Простейший пример - задание последовательности элементов множества формулой, содержащей параметр:

$$A = \{X_k = 3 + 2(k^3 + 5) - k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Задавая различные значения параметра k , мы можем вычислять элементы множества A : $X_0 = 13$, $X_1 = 14$, $X_2 = 27$ и т.д. Подобное задание может быть

явным, как в данном примере, или неявным, требующим разрешения. В частности, используются **возвратные**, или **рекуррентные** соотношения. Например, числа Фибоначчи задаются условиями: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, для $n > 2$.

Рассмотрим другой пример задания числового множества порождающей процедурой:

(1) $5 \in M$;

(2) если $a \in M$, то $1/a \in M$;

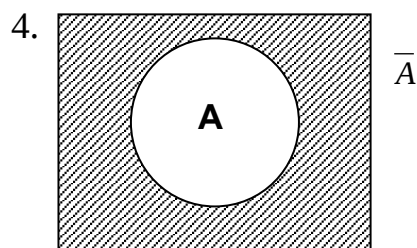
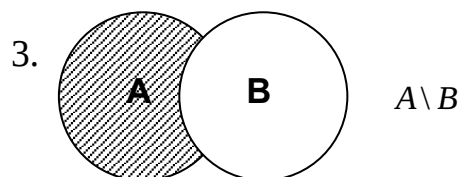
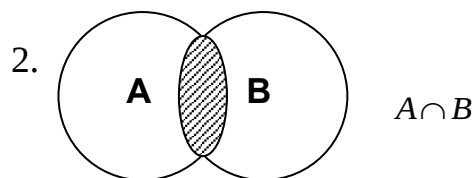
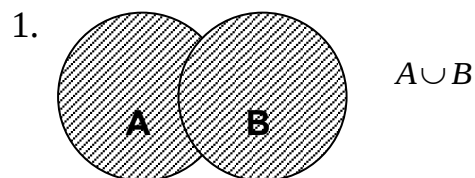
(3) если $a \in M$, то $(1-a) \in M$.

Это множество конечно и состоит из 6 элементов, а именно

$M = \{5, 1/5, -4, -1/4, 4/5, 5/4\}$.

Если же в правиле (3) заменить $(1-a)$ на $(2-a)$, то порождаемое множество будет бесконечным.

Графическое представление (Диаграммы Эйлера, Венна)



1. Коммутативность операций объединения и пересечения множеств

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. Ассоциативность операций объединения и пересечения множеств

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Взаимная дистрибутивность операций объединения и пересечения множеств

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

4. Закон идемпотентности

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$$

5. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

6. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

7. Операции с нулем и единицей $0 \Leftrightarrow \emptyset, 1 \Leftrightarrow U$

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cup 1 = 1; \quad A \cap 1 = A; \quad \bar{A} \cup A = 1; \quad \bar{A} \cap A = 0$$

8. Инволютивность

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Разбиение множества U – система непустых подмножеств $\{A_\alpha\}$ множества U такая, что их объединение равно U (полнота разбиения), а все попарные пересечения – пусты (чистота разбиения). Сами A_α называются классами, или блоками разбиения.

Пример. Система курсов данного факультета есть разбиение множества его студентов; система групп есть другое разбиение того же множества.

Конечная последовательность любых объектов, среди которых могут быть и повторяющиеся, называется **кортежем** (или **вектором**). Сами объекты называются **компонентами** кортежа.

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество M всех упорядоченных пар (a,b) , таких, что $a \in A$ и $b \in B$. Обозначается $A \times B$

Если $A=B$, то такое произведение называется A^2

Аналогично можно вывести операцию прямого произведения большего числа множеств.

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ как множество векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Если в частности $A_1, A_2, \dots, A_n$ одинаковы $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ то получаем A^n

(Например, множество точек на плоскости являются прямым произведением двух множеств).

Если множества конечные, мощность произведения $A \times B$ равна мощности произведений $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Суперпозиция функций

Соответствием G между множествами A и B называется подмножество $G \subseteq A \times B$. Если $(a, b) \in G$, то говорят, что b соответствует a . Множество всех $b \in B$, соответствующих элементу a , называется **образом** элемента a . Множество всех $a \in A$, которым соответствует элемент b , называется **прообразом** элемента b .

Множество пар (b, a) таких, что $(a, b) \in G$ называется обратным по отношению к G и обозначается G^{-1} . Понятия образа и прообраза для G и G^{-1} взаимнообратны.

Функциональное соответствие $A \rightarrow B$, или отображение – соответствие, при котором образом любого элемента $a \in A$ является **единственный** элемент $b \in B$. Например, площадь геометрической фигуры или объем пространственного тела суть их отображения в множество неотрицательных чисел. Если A, B – числовые множества, то соответствие называется функцией (хотя иногда функциями называют и не числовые соответствия).

n -местная функция (функция n переменных) - функция типа $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ другая форма записи: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$, где $a_i \in A_i$, $b \in B$. Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и функции выбора максимума и минимума являются двуместными функциями.

Суперпозиция функций – функция, полученная из системы функций f , $f_1, f_2, \dots, f_k$, некоторой подстановкой функций $f_1, f_2, \dots, f_k$ во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.

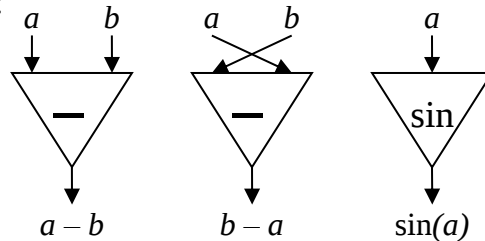
Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

В суперпозиции функций могут измениться как сами переменные, так и их число. Заметим также, что, выполняя подстановки, мы преобразовывали формулы, выражающие функции. **Формула** – это выражение, описывающее суперпозицию и содержащее функциональные знаки, символы независимых переменных (аргументов) и констант (параметров).

Функциональный элемент S представляет собой реализацию некоторой n -местной функции:

$f_S(X_1, X_2, \dots, X_n)$ причем каждой переменной соответствует один вход.

Например:



Упражнение.

Определите порядок действий при вычислении значения суперпозиции элементарных функций и

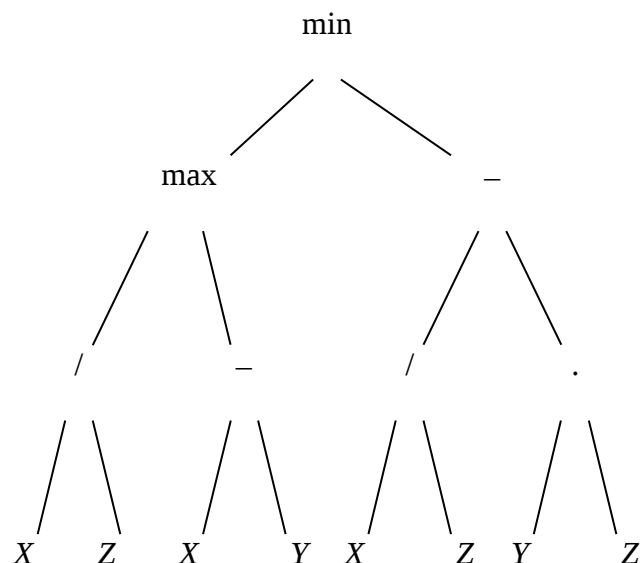
постройте соответствующую схему из функциональных элементов.

$$f(X, Y, Z) = \min(\max(X/Z, X - Y), X/Z - Y \cdot Z)$$

Решение:

Составим иерархическую схему последовательности действий. Для этого определим сначала состав переменных и констант в формуле, которая задает функцию: переменные X, Y, Z констант нет.

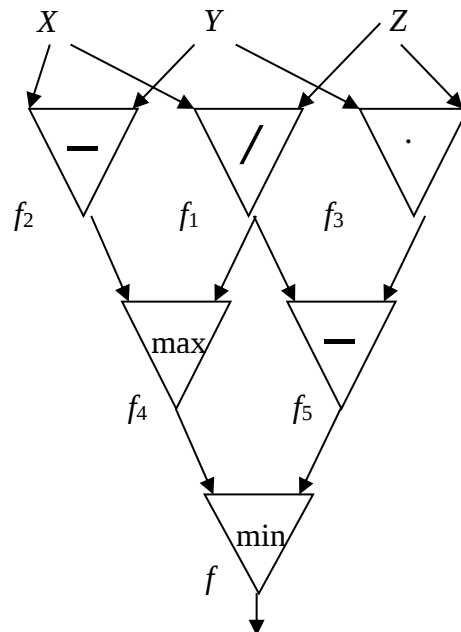
Определим внешнюю функцию и основные подформулы и построим иерархическую схему, определяющую порядок действий.



Определим совокупность используемых элементов с одним и двумя входами:

Функции первого «яруса»	$f_1 = X/Z$; $f_2 = X - Y$; $f_3 = Y \cdot Z$
Функции второго «яруса»	$f_4 = \max(f_1, f_2)$; $f_5 = f_1 - f_3$

Осуществим необходимые соединения:



Задания.

Определите порядок действий при вычислении значения суперпозиции элементарных функций и постройте соответствующую схему из функциональных элементов.

1. $f(X, Y, Z) = \max(X + 2 \cdot Z, 2 \cdot Y) / \sin(2 - Z)$
2. $f(X, Y, Z) = X^3 + \ln(3 \cdot Z^2 - 2 \cdot Y)$
3. $f(X, Y, Z) = 3^{X-Y} \cdot \sqrt{\cos^3(Z - 3)}$

Характеристическая функция множества $M \subseteq U$ – отображение $\chi_M : U \rightarrow B$, ставящее элементам множества M единицу, а элементам дополнения ноль. Характеристическая функция обладает следующими свойствами:

1. $\chi_M = 1 - \chi_{\bar{M}}$;
2. $\chi_{M \cap N} = \chi_M \cdot \chi_N$;
3. $\chi_{M \cup N} = \chi_M + \chi_N - \chi_M \cdot \chi_N$;
4. $\chi_{M / N} = \chi_M - \chi_M \cdot \chi_N$.

С помощью характеристических функций удобно устанавливать некоторые соотношения между множествами.