

Тақырыбы. Тәжірибелер тізбегінің математикалық моделі. Бернулли схемасы. Бернулли және Пуассон формулалары.

Мысал 10.1. Әрқайсысында оқиғаның орындалу ықтималдығы $p(0 < p < 1)$ санына тең болатын $n(n \in N)$ тәуелсіз тәжірибе жүргізгенде оқиғаның $k_0(k_0 = 1, 2, \dots, n)$ санынан кем рет орындалуының және ең болмағанда бір рет орындалуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Оқиға k_0 санынан кем рет орындалуын оқиға мүлде орындалмаған, бір рет орындалған, т.с.с., оқиға $k_0 - 1$ рет орындалған жағдайлар қанағаттандырады және бұл жағдайлар өзара үйлесімсіз болғандықтан

$$\begin{aligned} P_n(0 \leq k < k_0) &= P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k_0 - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} P_n(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Есептің екінші бөлігіне көшейік. Оқиғаның кем дегенде бір рет орындалуы

$$\begin{aligned} P_n(1 \leq k \leq n) &= P_n(1) + \dots + P_n(n) = \sum_{k=1}^n P_n(k) = \\ &= \sum_{k=1}^n C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Егер бұл жазу мен есептеу ауқымды болса, онда оның орнына Колмогоров аксиомаларының $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ салдарын

$$\begin{aligned} 1 &= P_n(1 \leq k \leq n) + P_n(0 \leq k < 1) \\ &= P_n(k \geq 1) + P_n(0) \end{aligned}$$

дербес жағдайда есеп шешімінің келесі түрдегі де жазылуын алуға болады

$$P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n.$$

Мысал 10.2. Бір билет ұтысты болуының ықтималдығы 0,01 санына тең. Кем дегенде бір билет ұтуының ықтималдығы 0,9 санына тең болу үшін қанша билет сатылып алынуы қажет?

Шешуі. n билет сатылып алынған болсын. Әр билет басқаларына тәуелсіз 0,01 ықтималдығымен ұтады, онда n билеттің кем дегенде бір билеті ұтуының ықтималдығын есептеуге қарама-қарсы оқиға ықтималдығы мен Бернулли формуласын қолдансақ

$$P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - P_n(0) = 1 - 0,99^n.$$

Әрі қарай, есеп шартына сәйкес $1 - 0,99^n \geq 0,9$ болуы қажет. Онда $0,99^n \leq 0,1$ теңсіздігінен $n \geq \log_{0,99} 0,1 \approx 229,1$. Демек 0,9 ықтималдығымен кем дегенде бір билет ұту үшін ең аз дегенде 230 билет сатылып алынуы қажет.

Мысал 10.3. Нысанаға тәуелсіз үш рет оқ атылады. Әрқайсысында оқтың нысанаға тиюінің ықтималдығы сәйкесінше $p_1 = 0,2, p_2 = 0,5, p_3 = 0,3$. Нысанаға бірде-бір оқ тимеуінің, екі оқ тиюінің, кем дегенде екі оқ тиюінің ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Туындатушы функция сәйкесінше

$$P_3(x) = (0,8 + 0,2x)(0,5 + 0,5x)(0,7 + 0,3x).$$

Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді біріктірсек

$$P_3(x) = 0,28 + 0,47x + 0,22x^2 + 0,03x^3.$$

Нысанаға бірде-бір оқтың тимеуінің ықтималдығы туындатушы функция анықтамасына сәйкес x айнымалысы жоқ $P_3(x)$ көпмүшелігінің босмүшесіне тең, яғни тәуелсіз 3 тәжірибеде k рет ұтыс пайда болу ықтималдығы үшін $P_n(k)$ белгілеуін сақтасақ, $P_3(0) = 0,28$, дәл сол сияқты нысанаға екі оқ тиюінің ықтималдығы $P_3(2) = 0,22$, ал кем дегенде екі оқ тиюінің ықтималдығы $P_3(2) + P_3(3) = 0,22 + 0,03 = 0,25$.

Мысал 10.4. Самолетке тәуелсіз n оқ атылады. Оқтың әрқайсысы самолеттің алдыңғы бөлігіне p_1 ықтималдығымен тиіп, бұл жағдайда самолет толығымен істен шығады, p_2 ықтималдығымен жанармай багіне, ал p_3 ықтималдығымен оқтар самолетке мүлде тимейді. Жанармай багіне тиген оқ бакті тесіп, одан сағатына k литр жанармай төгіледі. M литр жоғалтқаннан кейін самолет ұрысқа жарамсыз болады. Оқ атылғаннан жарты сағаттан кейін самолеттің ұрысқа жарамсыз болуының ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Барлық элементар оқиғалар жиыны келесі түрде жазылады:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

мұндағы $x_i = 0, 1, 2$ — i -оқ сәйкесінше самолеттің алдыңғы бөлігіне тиюін, жанармай багіне тиюін, самолетке тимеуін білдіреді. $x_i = 0, 1, 2$ болу ықтималдықтары сәйкесінше p_1, p_2, p_3 . Онда n тәуелсіз тәжірибелер жүргізген кезде 0 саны дәл m_1 рет, 1 саны дәл m_2 рет, 2 саны дәл m_3 рет ($m_1 + m_2 + m_3 = n$) пайда болуының ықтималдығы

$$P_n(m_1, m_2, m_3) = n! \prod_{j=1}^3 \frac{p_j^{m_j}}{m_j!}.$$

Самолет екі жағдайда ұрысқа жарамсыз болуы мүмкін. Егер кем дегенде бір оқ самолеттің бірінші бөлігіне тисе немесе бірде-бір оқ самолеттің алдыңғы бөлігіне тимей, кем дегенде бір оқ жанармай багіне тиіп, $m_2 k > M$ болса, онда самолет ұрысқа жарамсыз болып қалады. l саны $\frac{M}{k}$ санының бүтін бөлігі болсын, яғни $l = \left\lfloor \frac{M}{k} \right\rfloor$. Онда самолеттің ұрысқа жарамсыз болу оқиғасы

$$A = \bigcup_{\substack{(m_1, m_2, m_3): \\ 1 \leq m_1 \leq n, \\ 0 \leq m_2, m_3 \leq n \\ m_1 + m_2 + m_3 = n}} A_{m_1, m_2, m_3} \cup \bigcup_{\substack{(m_2, m_3): \\ l+1 \leq m_2 \leq n, \\ m_2 + m_3 = n}} A_{0, m_2, m_3},$$

$$A_{m_1, m_2, m_3} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \begin{aligned} &x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_{m_1}} \\ &= 0, x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_{m_2}} = 1, x_{k_1} = x_{k_2} \\ &= \dots = x_{k_{m_3}} = 2 \end{aligned} \right\} (m_1 + m_2 + m_3 = n)$$

A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)^n + \sum_{m_2=l+1}^n \frac{n!}{m_2!(n-m_2)!} p_2^{m_2} p_3^{n-m_2}.$$

Мысал 10.5. Оқулық 100 000 данамен шықты. Оқулықтың дұрыс түптелмеуінің ықтималдығы 0,0001 болса, дәл 5 дұрыс түптелмеген оқулық болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $n = 100000, p = 0,0001, k = 5$. Бернуллі формуласын қолдану есептеу ауқымды болғандықтан Пуассон формуласын қолданамыз. Алдымен $\lambda = np = 100000 \cdot 0,0001 = 10$. Онда ізделінді ықтималдық Пуассон формуласы бойынша

$$P_{100000}(5) \approx 10^5 \frac{e^{-10}}{5!} \approx 0,0375.$$

10.3-теоремаға сәйкес ықтималдықтың 0,0375 жуық мәні нақты мәнінен көп дегенде $np^2 = 100000 \cdot 0,0001^2 = 0,001$ санына ауытқиды.

Тапсырмалар

Есеп 10.1. Мүмкіндіктері бірдей екі шахматшы ойнауда. Келесі оқиғалардың қайсысының ықтималдығы артық: төрт партияның екеуін жеңу әлде алты партияның үшеуін жеңу?

Есеп 10.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен ықтималдығы 0,4 санына тең болатын В оқиғасы берілсін. Төрт рет тәжірибе жүргізгенде кем дегенде үш рет В оқиғасының пайда болу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 10.3. Әрқайсысында оқиғаның орындалу ықтималдығы p ($0 < p < 1$) санына тең болатын n ($n \in N$) тәуелсіз тәжірибе жүргізгенде оқиғаның кем дегенде k_0 ($k_0 = 0, 1, \dots, n$) рет орындалуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 10.4. Құрамында 7 саны бар болуының ықтималдығы $\frac{9}{10}$ санынан аз болмайтындай кездейсоқ қанша сан алыну қажет.

Есеп 10.5. Құрылғы бір-біріне тәуелсіз жұмыс жасайтын үш негізгі, екі резервті элементтен тұрады. Бұл үш элементтің кем дегенде біреуі жұмыс жасамаса құрылғы жұмыс жасамайды. t уақыт ішінде құрылғының әрбір элементінің жұмыс жасамай қалуының ықтималдығы 0,1 санына тең. Егер

- a) тек негізгі элементтер жұмыс жасаса;
- b) резервтегі бір элемент қосымша қосылса;
- c) резервтегі екі элемент қосымша қосылса

(резервтегі элементтер негізгі элементтер тәрізді жұмыс жасайды деп қабылданғанда) құрылғының n уақыт ішінде үзіліссіз жұмыс жасауының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 10.6. Нысанаға кездейсоқ 10 оқ атылады. Егер әрқайсысында нысанаға тию ықтималдығы 0,2 санына

тең болса, онда кем дегенде 2 рет нысанаға тию ықтималдығын анықтаңыз.

Есеп 10.7. Кездейсоқ таңдалған жеті адамның барлықтарының да туған күндері дәл екі айда болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 10.8. Кездейсоқ алты ойын сүйегі лақтырылады. 5 санының

a) кем дегенде бір;

b) дәл бір рет түсуінің

ықтималдығын табыңыз. Шыққан нәтижені Пуассонның жуық формуласымен есептелген нәтижемен салыстырыңыз.

Есеп 10.9. Орта есеппен адамдардың 1 пайызы солақайлар болса, кездейсоқ алынған 150 адамның ішінде дәл 3 солақай болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 10.10. Отбасында жеті бала бар. Егер ер баланың дүниеге келуінің ықтималдығы 0,51 санына тең болса, онда отбасында

a) кем дегенде екі ер баланың болуының,

b) ер балалардың санының екіден артық болуының,

c) ер балалардың санының дәл екеу болуының,

d) ер балалар санының екіден кем емес және үштен артық емес болуының ықтималдығын табыңыз.