

Тақырып. Оқиғалар тәуелсіздігі

Мысал 9.1. Ойын сүйегі лақтырылады. A оқиғасы түскен ұпайдың жұп болуы, B оқиғасы түскен ұпайдың 1, 2, 3 немесе 4 болуы болсын. Осы екі оқиғаны тәуелсіздікке тексеріңіз.

Шешуі. Тәуелсіздікке тексеру үшін анықтамадағы $P(A), P(B), P(AB)$ ықтималдықтарын есептеу жеткілікті және қажет те. Ол үшін ықтималдылықтың классикалық анықтамасын қолданамыз.

Элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |\Omega| = 6$$

және

$$A = \{2, 4, 6\}, |A| = 3, B = \{1, 2, 3, 4\}, |B| = 4, AB = \{2, 4\}, |AB| = 2$$

болғандықтан сәйкес ықтималдықтары

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Енді 9.1 анықтамадағы қажетті теңдік

$$P(AB) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

орындалады, демек, анықтама бойынша, A және B оқиғалары тәуелсіз болады.

Мысал 9.2. Тәжірибе тиынды кездейсоқ үш рет лақтырудан тұрсын. A оқиғасы кем дегенде екі рет сан жағы, ал B оқиғасы тиынның бірдей жақтары түскенін білдірсін. Егер тиынның сан жағы түсуінің ықтималдығы p ($0 < p < 1$) және сәйкесінше таңба жағы түсуінің ықтималдығы $1 - p$ болса, A және B оқиғаларын тәуелсіздікке зерттеңіз.

Шешуі. Элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CST, CTC, CCC\}.$$

Ал A және B оқиғалары

$$A = \{TCC, CTC, CST, CCC\}, B = \{TTT, CCC\}, AB = \{CCC\}.$$

A және B оқиғаларын тәуелсіздікке зерттеу үшін $P(A), P(B), P(AB)$ ықтималдықтарын анықтайық:

$$P(A) = 3p^2(1 - p) + p^3,$$

$$P(B) = (1 - p)^3 + p^3,$$

$$P(AB) = p^3.$$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ теңдігі $p = \frac{1}{2}$ жағдайында орындалып, ал қалған $p \in (0,1)$ нақты сандары үшін орындалмайды. Демек, $p = \frac{1}{2}$ жағдайында A және B оқиғалары тәуелсіз, ал қалған жағдайларда тәуелді болады.

Қос-қостан тәуелсіз, бірақ жаппай тәуелсіз емес оқиғалардың мысалдарын келтірейік.

Мысал 9.3. Тәжірибе жақтары 1,2,3 және 4 цифрларымен нөмірленген тетраэдрды кездейсоқ лақтырудан тұрсын. Мұнда элементар оқиғалар жиыны $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ оқиғалары қос-қостан тәуелсіз, бірақ жаппай тәуелсіз емес болатындығын көрсетіңіз.

Шешуі. Есеп шартына сәйкес $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Ал $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$. Демек

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C),$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)$$

теңдіктеріне сәйкес A, B, C оқиғалары қос-қостан тәуелсіз. Бірақ

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

орындалуына сәйкес жаппай тәуелсіз емес.

Мысал 9.4. Лотерея билетінің ішінде тең жартысында ұтыс бар. Ең болмағанда бір билетте ұтыс болатындығына 0,999-дан кем емес ықтималдықпен сенімді болу үшін қанша билет сатып алу қажет?

Шешуі. Әр билеттің жеке-жеке ұтысты болуының ықтималдығы 0,5 (есеп шарты бойынша) болсын. Онда осы оқиғалардың ең болмағанда біреуінің орындалуы ықтималдығының формуласы бойынша

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - (1 - 0,5)^n = 1 - 0,5^n \geq 0,999$$

бұдан

$$0,5^n \leq 1 - 0,999 = 0,001$$

теңсіздігіне келеміз, екі жағын да логариф алғаннан кейін

$$n \lg 0,5 \leq \lg 0,001 \Rightarrow n \geq \frac{\lg 0,001}{\lg 0,5} \approx 9,97,$$

яғни ең аз дегенде 10 билет алса, жоқ дегенде бір билет ұтысты болады.

Тапсырмалар

Есеп 9.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. A және B оқиғалары тәуелсіз болса, онда A және $\bar{B}$, $\bar{A}$ және B , $\bar{A}$ және $\bar{B}$ оқиғалары тәуелсіз болатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 9.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының жаппай тәуелсіздігі олардың қос-қостан тәуелсіздігіне карағанда күшті ұғым екендігін, яғни қос-қостан тәуелсіз $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары әрқашан жаппай тәуелсіз бола бермейтіндігін көрсетіңіз (9.2 мысалынан өзге мысал беріңіз).

Есеп 9.3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. A, B және C оқиғалары үшін $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ теңдігі орындалғанымен, әрқашанда қос-қостан тәуелсіздік орындалмайтындығына мысал келтіріңіз.

Есеп 9.4. Колодадан кездейсоқ карта алынады. A оқиғасы алынған картаның «тұз», B оқиғасы алынған картаның «қарға» болуы болса, A және B оқиғаларын тәуелсіздікке тексеріңіз.

Есеп 9.5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары жаппай тәуелсіз болса, онда $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ оқиғалары да жаппай тәуелсіз болатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 9.6. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер A және B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда олар тәуелсіз болатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 9.7. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер A және B оқиғалары үйлесімді болса, онда олар тәуелді де, тәуелсіз де болуы мүмкін екендігін көрсетіңіз (екі мысал келтіріңіз).

Есеп 9.8. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер A және B оқиғалары тәуелсіз болса, онда олар үйлесімді де, үйлесімсіз де болуы мүмкін екендігін көрсетіңіз (екі мысал келтіріңіз).

Есеп 9.9. Үш жағы 1,2,3 цифрларымен, ал төртінші жағында 1,2,3 цифрларының барлығы жазылған тетраэдр лақтырылды. A_i оқиғасы сәйкес $i = 1, 2, 3$ цифрларының бірі түсуі болса, осы үш оқиғаларды жаппай тәуелсіздікке зерттеңіз.

Есеп 9.10. Жәшікте 112,121,221,222 сандарымен нөмірленген бірдей төрт билет бар. Жәшіктен кездейсоқ бір билет алынып, келесі оқиғалар қарастырылады:

$A_1 = \{\text{билеттегі санның } 1 - \text{ші орнында } 1 \text{ саны тұр}\},$

$A_2 = \{\text{билеттегі санның } 2 - \text{ші орнында } 1 \text{ саны тұр}\},$

$A_3 = \{\text{билеттегі санның } 3 - \text{ші орнында } 1 \text{ саны тұр}\}.$

Осы үш оқиғаны қос-қостан және жаппай тәуелсіздікке зерттеңіз.

Есеп 9.11. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен әрқайсысының ықтималдығы $\frac{1}{2}$ санына тең болатын жаппай тәуелсіз A_1, A_2, A_3 оқиғалары берілсін. $A_{ij} = (A_i \Delta A_j)^c = \Omega \setminus (A_i \Delta A_j)$ оқиғаларын анықтайық, мұндағы Δ симметриялық айырым. A_{12}, A_{13}, A_{23} оқиғаларын қос-қостан және жаппай тәуелсіздікке зерттеңіз.

Есеп 9.12. n әріпті әліпбидің барлық мүмкін болатын үш әріпті "сөздерінен" (сөздердің мағынасы болуы маңызды емес) құрылған Ω жиыны берілсін. A оқиғасы бірінші әрпі x болатын барлық сөздерден, B оқиғасы екінші әрпі x болатын барлық сөздерден және C оқиғасы құрамында екі бірдей әрпі бар сөздерден тұрсын. A, B, C оқиғаларын қос-қостан және жаппай тәуелсіздікке зерттеңіз.