

Тақырыбы. Шартты ықтималдық және ықтималдықтың негізгі формулалары

Мысал 8.1 (Лотерея билеті). 1–30 аралығындағы сандармен нөмірленген шарлардан 6 шар қайтарымсыз таңдап алынатын, бірақ реті ескерілмейтін ұлттық лотерея ойынын қарастырайық. Әрбір ойыншы алдын ала алты саннан тұратын комбинациялы билетке ие болады. Айталық, белгілі бір ойыншының лотереясы келесі алты – 1, 14, 15, 20, 23 және 27 сандарынан тұрсын. Ойыншы теледидар алдында тек бір – «15»-нөмірді белгілей салысымен электр энергиясы ажыратылып қалды. Ары қарай қандай сандар шығатыны оған белгісіз болса да, сіз жеңу мүмкіндігіңіз біраз болсын жоғарлағанын білесіз. Бұл жағдайда ықтималдық қалай өзгереді? Және ол неге тең?

Шешуі. Әрине, бастапқыда тәжірибенің барлық мүмкін элементар оқиғаларының жиынын алып, қажетті оқиғаның ықтималдығын есептеуге болады. Бірақ біз H оқиғасының орындалғанын білеміз, осы жағдайда 8.1 мысалда қойылған сұраққа жауап берейік. Шарт бойынша $H = \{\text{алты цифрдің тек бірі} - 15\}$. Бізге $A = \{1, 14, 15, 20, 23, 27\}$ комбинациясының орын алуы қызықтырады. Ол үшін H оқиғасы орындалған жағдайдағы A оқиғасының орындалатын жағдайларын, яғни $A \cap H$ оқиғасын қарастырамыз.

(8.1) ықтималдықты есептеу формуласын қолдану үшін алдымен $P(H)$ ықтималдығын есептеу қажет. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша $P(H) = \frac{|H|}{|\Omega|}$.

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_6): a_j = 1, 2, \dots, 30; j = 1, 2, \dots, 6\}, |\Omega| = C_{30}^6 = \frac{30!}{24! \cdot 6!},$$

$$H = \{(a_1, a_2, \dots, a_6) : a_j = 1, 2, \dots, 30; j = 1, 2, \dots, 6; \exists! j_0 \in \{1, 2, \dots, 6\}, a_{j_0} = 15\},$$

$$|H| = C_{29}^6 = \frac{29!}{24! \cdot 5!}.$$

Бұдан

$$P(H) = \frac{29! \cdot 24! \cdot 6!}{30! \cdot 24! \cdot 5!} = \frac{6}{30} = 0,2,$$

$$AH = \{(1, 14, 15, 20, 23, 27)\}, |AH| = 1,$$

яғни

$$P(AH) = \frac{|AH|}{|\Omega|} = \frac{1}{\frac{30!}{24! \cdot 6!}} = \frac{24! \cdot 6!}{30!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{1}{25 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 29} = \frac{1}{593775} \approx 1,68 \cdot 10^{-6},$$

онда анықтама бойынша

$$P(A|H) = \frac{P(AH)}{P(H)} \approx \frac{1,68 \cdot 10^{-6}}{0,2} = 8,4 \cdot 10^{-6}.$$

Енді есеп сұрағына жауап беру үшін $P(A)$ шартсыз ықтималдығын есептейік.

$$|A| = 1$$

демек,

$$P(A) = \frac{1}{\frac{30!}{24! \cdot 6!}} \approx 1,68 \cdot 10^{-6}.$$

Бұдан H оқиғасы орындалғанда A оқиғасының орындалу ықтималдығы артық екендігін көреміз, яғни $P(A) < P(A|H)$.

Мысал 8.2. Екі ойын сүйегі лақтырылды және онда түскен ұпайлардың қосындысы тақ екендігі белгілі (H оқиғасы). Түскен ұпайлар қосындысы 8 санынан кіші болу ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. H оқиғасы орындалғанда A оқиғасы орындалуы түскен ұпайлар қосындысы тақ бола отырып, 8 санынан кіші болуы, яғни $A \cap H$ оқиғасы ұпайлар қосындысы 3, 5 немесе 7 санына тең болуы. Шартты ықтималдықтың тікелей анықтамасы бойынша

$$\Omega = \{(i, j): i, j = 1, 2, \dots, 6\}, |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36,$$

$$H = \{(i, j): i + j = 2k + 1; i, j = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, 5\}, |H| = 6 \cdot 3 = 18,$$

$$A = \{(i, j): i, j = 1, 2, \dots, 6; i + j < 8\}, |A| = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21,$$

$$AH = \{(i, j): i + j = 2k + 1 < 8; i, j = 1, 2, \dots, 6, k = 1, 2, \dots, 5\},$$

$$|AH| = 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 12.$$

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(AH) = \frac{|AH|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Осыдан шартты ықтималдық анықтамасынан

$$P(A|H) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Немесе, бұл есепті Ω жиынының H шартын қанағаттандыратын бөлігін ғана қарастырсақ, жоғарыда есептегеніміз бойынша

$$P(A|H) = \frac{|AH|}{|H|} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Мысал 8.3. Тұрмысқа қажетті заттар дайындау үшін ерігіш материал алудың 3 тәсілі ұсынылған. Сонымен қатар, бұрыннан белгілі пластмассада жасау да қолданылады. 150 зат зерттелсін. Олар жасалу жолдары бойынша төрт топқа бөлінген (жаңа 3 тәсіл және пластмассамен жасау) және артынан сол затты ерігіштігі арқылы қайта жөндеуге жатуы бақыланады. Кестеде нәтижелері көрсетілген. Төрт түрлі жолдың қайсысы ең тиімді, қайсысы пайдасыз екендігін анықтаңыз.

Заттар жайлы толық мәлімет

Жасалу тәсілі	1-әдіс	2-әдіс	Олардың біріккен әдісі	Пластмасса	Барлығы
Мүлдем жөндеуге келмейтіндері	18	13	22	24	77
Қалай сынса да жөнделетіні	22	25	16	10	73
Барлығы	40	38	38	34	150

Шешуі. H заттың пластмассада жасалғаны болса, A оның мүлдем жөндеуге келмейтіні болсын.

$$\Omega = \{\omega_i: i = 1, 2, \dots, 150\}, H = \{\omega_i: i = 1, 2, \dots, 34\}, AH = \{\omega_i: i = 1, 2, \dots, 24\},$$

онда ықтималдықтың классикалық анықтамасынан

$$P(H) = \frac{34}{150}, P(AH) = \frac{24}{150}.$$

Шартты ықтималдық анықтамасы бойынша

$$P(A|H) = \frac{\frac{24}{150}}{\frac{34}{150}} = \frac{24}{34} \approx 0,71.$$

Дәл сол сияқты, кездейсоқ таңдап алынған зат 1-әдіспен жасалғаны – B оқиғасы болса, оның қайтадан жөндеуге келмейтіндігінің ықтималдығы

$$P(A|B) = \frac{\frac{18}{150}}{\frac{40}{150}} = \frac{18}{40} \approx 0,45.$$

2-әдіспен жасалған заттың (C оқиғасының) мүлдем жөнделмейтіндігінің ықтималдығы:

$$P(A|C) = \frac{\frac{13}{150}}{\frac{38}{150}} = \frac{13}{38} \approx 0,34.$$

Соңында, екі әдісті бірге қолданғанда (D оқиғасы) заттың жөнделмейтіндей сынуының ықтималдығын есептейтін болсақ,

$$P(A|D) = \frac{\frac{22}{150}}{\frac{38}{150}} = \frac{22}{38} \approx 0,58.$$

Аталмыш затты жасаудың ең тиімсіз әдісі пласмассадан жасау болып шығуын есеп нәтижесінен көруге болады.

Мысал 8.4. n қызыл $\{k_1, \dots, k_n\}$ шар және m сары $\{c_1, \dots, c_m\}$ шар бар жәшіктен қайтарымсыз екі шар таңдап алынады. Бірінші алынған шар қызыл, екінші алынған шар сары болу ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Барлық мүмкін элементар оқиғалар кеңістігі

$$\Omega = \{(a, b): a, b \in \{k_1, \dots, k_n, c_1, \dots, c_m\}\}.$$

Бұл жиындағы элементтері реттелген және қайтарымсыз болғандықтан, ондағы элементтер саны

$$|\Omega| = A_{n+m}^2.$$

Ал A оқиғасы шарлардың бірінші қызыл, екіншінің сары болуы

$$A = \{(a, b): a \in \{k_1, \dots, k_n\}, b \in \{c_1, \dots, c_m\}\}.$$

Осы жиынның элементар оқиғаларының санын анықтайық. Бірінші k_1 шары түсті делік, екінші орында көк m тәсілмен түседі, сол сияқты бірінші орындағы қызыл шарлардың орындарын ауыстырып отырсақ, комбинаториканың негізгі ережесі бойынша

$$|A| = n \cdot m.$$

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P(A) = \frac{nm}{A_{n+m}^2} = \frac{nm}{\frac{(n+m)!}{(n+m-2)!}} = \frac{nm}{(n+m-1)(n+m)}.$$

Енді осы есепті көбейту формуласымен шығарайық. A оқиғасы A_1 оқиғасы бірінші алынған шар қызыл, A_2 оқиғасы екінші алынған шар сары болатын екі оқиғаның қиылысуынан тұрады. Онда $n+m$ шары бар жәшіктен бір қызыл шарды таңдап алудың ықтималдығы классикалық анықтама бойынша

$$P(A_1) = \frac{n}{n+m}.$$

A_1 оқиғасы орындалды, яғни бірінші рет жәшіктен таңдалған шар қызыл шар алынды делік. Бірінші қызыл

шар алынғанда екінші сары шар болып шығу ықтималдығын анықтайық, бұл жағдайда барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega_{A_2} = \Omega \setminus A_1 = \{k'_1, \dots, k'_{n-1}, c_1, \dots, c_m\}, \\ |\Omega \setminus A_1| = n - 1 + m;$$

$$A_2 = \{c_1, \dots, c_m\}, |A_2| = m.$$

Тағы да классикалық анықтама бойынша

$$P(A_2|A_1) = \frac{m}{n+m-1}.$$

Енді көбейту формуласын қолдансақ

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1}.$$

Мысал 8.5. «МАТЕМАТИКА» сөзінің әріптерінен карточкалар қиылып, 3 карточка таңдап алынады да, рет-ретімен солдан оңға қарай орналастырылады. Сонда «АТА» сөзінің шығу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. А оқиғасы «АТА» сөзінің шығуы болсын, ол A_1 – 1-орында «А» әрпінің, A_2 – 2-орында «Т» әрпінің, A_3 – 3-орында «А» әрпінің шығу оқиғаларынан тұрады және

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1A_2))$$

теңдігі орындалады. Комбинаториканың негізгі ережесін қолдана отырып,

$$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К, А\}\}, |\Omega| \\ = 10 \cdot 9 \cdot 8,$$

$$A = \{(А, Т, А)\}, |A| = 3 \cdot 2 \cdot 2,$$

ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша,

$$P(A) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{60}.$$

Енді осы ықтималдықты тағы да көбейту формуласы арқылы есептейік:

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{10},$$

бірінші алынған әріп «А» шыққанда, екінші әріптің «Т» шығу ықтималдығы, яғни A_1 оқиғасы орындалғанда A_2 оқиғасының орындалу ықтималдығы

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}.$$

A_1 мен A_2 оқиғалары орындалғанда A_3 оқиғасының орындалу ықтималдығы

$$P(A_3|(A_2A_1)) = \frac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_2 \cap A_1)} = \frac{\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8}}{\frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9}} = \frac{1}{4},$$

онда

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_2A_1)) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}.$$

Мысал 8.6. Екі қорапта ұзын және қысқа болттар бар. Бірінші қорапта 60 ұзын және 40 қысқа болт, екінші қорапта 10 ұзын және 20 қысқа болт бар. Екі қораптың бірі кездейсоқ тандап алынады да, кейін одан болт

таңдап алынады. Алынған болттың ұзын болу ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. A оқиғасы алынған болттың ұзын болуы болсын. Егер H_1 – бірінші жәшіктің таңдалуы, H_2 – екінші жәшіктің таңдалуы болса, онда сәйкесінше $P(A|H_1)$ және $P(A|H_2)$ ықтималдықтары бірінші немесе екінші жәшіктер таңдалған болттың ұзын болуының ықтималдықтары. Осы оқиғалардың ықтималдықтарын есептейік:

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

екі жәшіктің біреуін таңдап алу ықтималдығы (бұл да классикалық анықтама бойынша $\Omega = \{H_1, H_2\}$ үшін есептелінеді), ал H_1, H_2 гипотезаларының әрқайсысы орындалғанда оқиғасының орындалу ықтималдығы тағы да ықтималдықтың классикалық анықтамасына сәйкес

$$P(A|H_1) = \frac{60}{100}, \quad P(A|H_2) = \frac{10}{30}.$$

Толық ықтималдық формуласы бойынша

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{60}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{30} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

Мысал 8.7. Сақтандыру компаниясы шетелге адамдарды сақтанандыру полюсімен жібереді. Жіберген адамдардың 10 пайызы сақтандыру жағдайына ұшырайды (статистикалық мәліметтерге сәйкес). Сақтандыру шарасының орын алған жағдайда адамдардың 80% компанияға хабарласады. Ал сақтандырылған адам ол жағдайға түспесе де, 20% мөлшерде түсті деген қате мәлімет беріледі. Шетелге шыққан кездейсоқ таңдап алынған адамның сақтандыру жағдайына ұшырады деп шығуының ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. A оқиғасы сақтандырылған адамның сақтандыру жағдайына ұшырауы болсын. Екі гипотеза құралық: H_1 – адам сақтандыру жағдайына ұшыраған болуы, H_2 – таңдап алынған адам сақтандыру жағдайына ұшырамауы болсын.

Онда олардың сәйкес ықтималдықтары $P(H_1) = 0,9, P(H_2) = 0,1$.

Және де, осы гипотезалардың әрқайсысы орындалды дегендегі нәтиженің оң болып шығу ықтималдықтары сәйкесінше, $P(A|H_1) = 0,2, P(A|H_2) = 0,8$. Онда тағы да толық ықтималдық формуласы бойынша

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ &= 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,26. \end{aligned}$$

Мысал 8.8. 8.7 мысалдың шартын қарастырайық. Тексерілген адам нәтижесі оң болғанда (сақтандыру жағдайына ұшыраған жағдайда) оның аман-есен болып шығу ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. 8.7-мысал бойынша A оқиғасының ықтималдығы 0,26. Қате мәлімет берілгенде, яғни ешқандай сақтандыру жағдайына ұшырамаған адамның сақтандыру жағдайына ұшырады деп танылу ықтималдығын Байес формуласы бойынша есептесек

$$P(H_1|A) = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8} \approx 0,69.$$

Тапсырмалар

Есеп 8.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі, $P(H) > 0$ шартын қанағаттандыратын H және A оқиғалары берілсін. Ω жиынының қандай да бір H оқиғаға дейінгі сығылуы негізінде анықталған шартты ықтималдық Колмогоров аксиомаларын қанағаттандыратындығын дәлелдеңіз.

Есеп 8.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі, $P(H) > 0$ шартын қанағаттандыратын H және A оқиғалары берілсін. $P(\bar{A}|H) = 1 - P(A|H)$ теңдігінің орындалатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 8.3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі, $P(H) > 0$ шартын қанағаттандыратын H және A оқиғалары берілсін. Егер $A \subset H$ болса, онда $P(A|H)$ ықтималдығын анықтаңыз.

Есеп 8.4. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. $P(A|B) > P(B|A)$ және $P(A) > 0, P(B) > 0$ болсын. $P(A) > P(B)$ теңсіздігі әрқашан орындала ма?

Есеп 8.5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Кез келген A, B және $C, P(C) > 0$ оқиғалары үшін $P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - P((A \cap B)|C)$ орындалатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 8.6. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер $A \cap B = \emptyset, P(B) > 0$ болса, онда $P(A|B)$ ықтималдығын анықтаңыз.

Есеп 8.7. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. $P(B) > 0, P((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)|B) > 0$ болатын $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ оқиғалары берілсін.

$$\begin{aligned} P((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)|B) &= \\ &= P(A_1|B) \cdot P(A_2|(A_1 \cap B)) \\ &\cdot P(A_3|(A_2 \cap A_1 \cap B)) \cdot \dots \cdot \\ &\cdot P(A_n|(A_{n-1} \cap \dots \cap A_1 \cap B)) \end{aligned}$$

болатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 8.8. Жәшікте 4 қара, 6 қоңыр және 8 сұр шұлықтар бар. Жәшіктен кездейсоқ екі шұлық алынады.

a) Алынған шұлықтардың бір түсті болу ықтималдығы қандай?

b) Бір түсті екендігі белгілі болса, оның сұр болу ықтималдығы қандай?

Есеп 8.9. Сатып алушы тіс пастасын алған сайын A немесе B брендин таңдайды. Ол таңдап алған брендин екінші рет алғанда ауыстырмауының ықтималдығы $\frac{1}{3}$

санына, ал екінші брендке ауысып кету ықтималдығы $\frac{2}{3}$ санына тең. Егер сатып алушының бірінші пастаны A немесе B брендінен таңдап алу ықтималдықтары бірдей болса, бірінші және екінші жолы A бренді, үшінші және төртінші жолы B бренді таңдап алу ықтималдығын есептеңіз.

Есеп 8.10. Сатып алушы тіс пастасын алған сайын A немесе B бренді таңдайды. Ол таңдап алған бренді екінші рет алғанда ауыстырмауының ықтималдығы $\frac{1}{3}$ санына, ал екінші брендке ауысып кету ықтималдығы $\frac{2}{3}$ санына тең. Егер сатып алушының бірінші пастаны A брендінен таңдап алу ықтималдығы $\frac{1}{4}$ болса, B брендінен таңдап алуы ықтималдығын анықтаңыз.