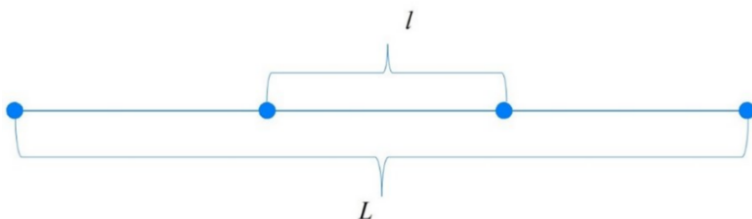


Тақырыбы. Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы

Мысал 7.1. Ұзындығы l болатын кесінді ұзындығы L санына тең кесіндінің ішінде орналассын (7.1-сурет). Ұзындығы L санына тең кесіндіге лақтырылған нүкте ұзындығы l санына тең кесіндіге түсу оқиғасының ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. 3-сабақта айтып өткеніміздей, нақты анализ курсы бойынша кесіндінің өлшемі оның ұзындығына тең, онда (7.1) формуласы бойынша

$$P(A) = \frac{l}{L} \quad (7.1)$$



7.1-сурет

Мысал 7.2. Шеңбер мен оның бойынан диаметрінде жатпайтын екі A және B нүктелері берілсін. Осы шеңбер бойынан кездейсоқ C нүктесі алынған. BC кесіндісі A нүктесі арқылы өтетін AD диаметрін қиып өту ықтималдығын табыңыз.

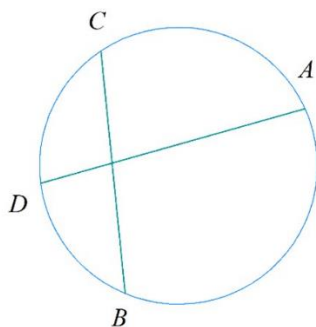
Шешуі. Тәжірибе нүктені ұзындығы L оң санына тең болатын шеңберге кездейсоқ лақтырудан тұрады. Алдымен элементар оқиғалар жиынын құрайық. Центр координаталары (a, b) нүктесі, ал радиус ұзындығы r болатын шеңбер

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

теңдеуі арқылы анықталады. Демек, элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}, \quad A, B \in \Omega.$$

E оқиғасы $\{C = (x, y) \in \Omega: BC \text{ кесіндісі } AD \text{ диаметрін қиып өтеді}\}$. E оқиғасы тек C нүктесі B нүктесін қамтымайтын AD жарты шеңберінде жатқан кезде ғана орындалады.



7.2-сурет

Бұл жарты шеңбердің ұзындығы $\frac{1}{2}L$ санына тең. Онда (7.1) бойынша E оқиғасының ықтималдығы

$$P(E) = \frac{\frac{1}{2}L}{L} = \frac{1}{2}.$$

Мысал 7.3. Жазықтықтағы ауданы $\mu(A) = s$ санына тең фигура ауданы $\mu(\Omega) = S$ санына тең фигураның ішінде орналасқан. Ауданы S санына тең фигураға кездейсоқ лақтырылған нүкте ауданы s санына тең фигураға түсуі болатын A оқиғасының ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Жазықтықтағы $\Omega \subset R^2$ фигурасы өлшемді болса, онда оның Лебег өлшемі ауданына тең екендігі белгілі. Бұдан 7.1 анықтамасына сәйкес A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{s}{S} \quad (7.2)$$

формуласымен есептелінеді.

Мысал 7.4. $[0,2]$ кесіндісінен кездейсоқ x және y сандары таңдап алынған. Осы сандардың $x^2 \leq 4y \leq 4x$ шартын қанағаттандыру ықтималдығын есептеңіз.

Шешуі. Есептің шарты бойынша (x, y) нүктесінің координаталары

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

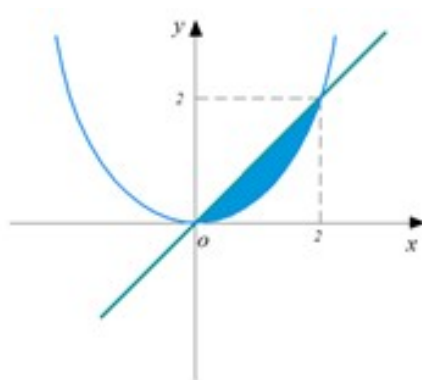
теңдеулер жүйесін қанағаттандырады. Яғни, (x, y) нүктесі қабырға ұзындығы 2-ге тең квадраттың ішінен кездейсоқ алынады. Демек, элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Бізге қажетті A оқиғасы нүкте параболаның үсті мен түзудің астында орналасқан жағдай, яғни

$$A = \{(x, y) \in R^2: x^2 \leq 4y \leq 4x\}.$$

(7.2) бойынша қажетті ықтималдықты алу үшін 7.3-суреттегі $y = \frac{x^2}{4}$ және $y = x$ функцияларының графиктерімен шенелген фигураның ауданын есептеу қажет. Ол үшін Риман интегралын қолданып, A оқиғасының өлшемін (A оқиғасына сәйкес келетін фигура ауданын) анықтайық



7.3-сурет

$$\mu(A) = s = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{4}{3},$$

ал Ω жиынының ауданы

$$\mu(\Omega) = S = 2 \cdot 2 = 4.$$

Онда

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}.$$

Мысал 7.5. Коммуналдық қызметтерге сұраныс есебін қарастырайық. Кешен салушы мердігерге су мен электр энергиясын (су құбырларын және электр желілерін) жоспарлау қажет. Статистикалық мәліметтерге сәйкес мердігер электр энергиясы тәулігіне 1 миллион мен 1,5 миллион киловатт-сағат арасында қолданылса, су күніне 4-тен 20 м³-қа дейін жұмсалатындығын анықтады. Электр энергиясы мен су қажеттілігінің кез келген комбинациясы мүмкін. Ал құзырлы мекемелердің шешімі бойынша тәулігіне тұтылатын электр энергиясының мөлшері 1,2 миллион киловаттан асып кетпеу керек болса, тазалық пен басқа да шараларға байланысты қолданылатын су мөлшері 15 м³-тан кем болмауы қажет. Тұтынылған су мен электр өнімі межелеген мөлшерден шығып кетпеу ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Элементар оқиғалар кеңістігі

$$\Omega = \{(x, y): 1 \leq x \leq 1,5; 4 \leq y \leq 20\}$$

мұндағы x – күнделікті тұтынылатын су мөлшері, y – тұтынылатын электр энергиясын білдіреді. Ал зерттелініп отырған A оқиғасы

$$A = \{(x, y): 1 \leq x \leq 1,2; 15 \leq y \leq 20\}.$$

Онда ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(1,2 - 1)(20 - 15)}{(1,5 - 1)(20 - 4)} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

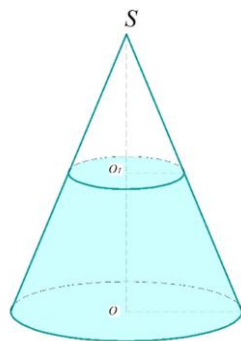
Мысал 7.6. Көлемі v санына тең фигура көлемі V санына тең фигураның ішінде орналасқан. Көлемі V санына тең фигураға лақтырылған нүкте көлемі v санына тең фигураға түсу ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Кеңістіктегі $\Omega \subset R^3$ өлшенетін дененің Лебег өлшемі оның көлеміне тең болғандықтан, ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша

$$P(A) = \frac{v}{V}. \quad (7.3)$$

Кеңістіктегі геометриялық ықтималдық (7.3) формуласымен есептелінеді.

Мысал 7.7. Төбесі S , табан центрі O нүктесі болатын конусқа (7.4-сурет) кездейсоқ нүкте лақтырылады, сол нүкте конус биіктігінің ортасы O' нүктесі арқылы табанына параллель өтетін жазықтықпен қиғандағы қиық конуста жату ықтималдығын анықтаңыз.



7.4-сурет

Шешуі. Эксперименттің Ω элементар оқиғалар жиыны төбесі S , табан центрі O нүктесі болатын конустың барлық нүктелер жиыны болса, A оқиғасы кездейсоқ лақтырылған нүктенің қиық конусқа түсуі болып табылады. Бұл оқиғаның ықтималдығы ықтималдықтың геометриялық анықтамасын қолданып, (7.3) формуласымен есептеледі. Ол үшін конустың да, қиық конустың да көлемдерін есептеу керек. Төбесі S , табан центрі O нүктесі болатын конус табанының радиусын R , биіктігін H арқылы белгілейік, онда төбесі S , табан центрі O' нүктесі

болатын конус табанының радиусы $\frac{R}{2}$, биіктігі $\frac{H}{2}$ болады. Конус көлемінің формуласы бойынша үлкен конус көлемі, яғни Ω жиынының өлшемі $V = \mu(\Omega) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ болса, A оқиғасының өлшемі болып табылатын қиық конус көлемі үлкен конус пен кіші конустың көлемдерінің айырмасы

$$v = \mu(A) = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{24}\pi R^2 H = \frac{7}{24}\pi R^2 H$$

санына тең болады. Сонымен, A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{7}{24}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{7}{8}.$$

Тапсырмалар

Есеп 7.1. Квадраттарының қабырғасының ұзындығы a санына тең шексіз шахмат тақтасына радиусы $r (r < \frac{a}{2})$ санына тең тиын лақтырылады. Осы тиын толығымен шахмат тақтасының бір квадратына түсу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 7.2. Уақыттың кез келген T интервалы аралығында бір-бірінен тәуелсіз екі сигнал түсуі мүмкін. Егер сигналдардың түсу уақытының арасы τ санынан кіші болса, олар бұзылады. Келген екі сигналдың бұзылу ықтималдығын табыңыз. Бұзылмауының ықтималдығы қандай?

Есеп 7.3. Екі жолдас белгіленген орында күндізгі екі мен үштің арасында кездесуге келісті. Бірінші келгені екіншісін 10 минут күтеді де кетеді. Егер екеуінің көрсетілген аралықтың кез келген уақытында келетіні белгілі болса, онда олардың кездесуінің ықтималдығы қандай?

Есеп 7.4. Жазықтықта радиустары 5 және 10 болатын концентрлі екі дөңгелек сызылған. Үлкен дөңгелекке кездейсоқ лақтырылған нүкте кіші дөңгелекке түсу ықтималдығын анықтаңыз.

Есеп 7.5. Ох өсінен алынған ұзындығы L санына тең AO кесіндісінен B нүктесі алынған.

a) AB, BO кесінділерінің қысқасының ұзындығы $\frac{L}{3}$ санынан үлкен болу ықтималдығын табыңыз.

b) AB, BO кесінділерінің қысқасының ұзындығы $\frac{L}{3}$ санынан кіші болу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 7.6. Қабырғасы a санына тең квадратқа шеңбер іштей сызылған. Квадраттан кездейсоқ белгіленген нүкте шеңбер ішінде жату ықтималдығын табыңыз.

Есеп 7.7. Бораннан кейін телефон желісінің 40-70 метр аралығындағы сым үзілген. Үзілу 50 метр мен 55 метрдің арасында болу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 7.8. Екі жүк көлігі жүк түсіруге кешкі 19 бен 20 арасында келеді. Бірінші көліктің жүгін түсіруге 10 минут, екінші көліктікін түсіруге 15 минут кететіні белгілі. Екеуінің кезек күтпеу ықтималдығы қандай?

Есеп 7.9. Бір қаладағы екі дос сирек кездеседі. Оның мәнісі, әрқайсысы кездесу орнына кешкі 5 пен 6 арасында келеді және екіншісін тек 5 минут қана күтеді. Екіншісі осы 5 минут ішінде келсе, олар кездесетіндігі белгілі, достардың кездесу ықтималдығын анықтаңыз?

Есеп 7.10. Ұзындығы 200 метр жолақтың бір жағының 30 метріне, екінші жағының 50 метріне жазулар жазылған және ол жазулар қай бөлікке жазылғаны белгісіз. Жарамсыз болуына байланысты 80-ші метрден бастап 10 метр жолақты алып тастауға тура келді.

- a) екі жақтың да жазулары бүлінбеуінің;
 - b) бірінші жақ жазудың бүлініп, екінші жақ жазудың бүлінбеуінің;
 - c) екінші жақ жазудың бүлініп, бірінші жақ жазудың бүлінбеуінің;
 - d) екі жақтың да жазулары бүлінуінің
- ықтималдықтарын анықтаңыз.