

Тақырыбы. Ықтималдықтың практикалық мағынасы

Мысал 6.1. Ойын сүйегі кездейсоқ 30 рет лақтырылды. $j(j = 1, 2, \dots, 6)$ цифрының түсу саны 6.1 кестесінде келтірілген. Жұп сан түсуінің, 3 цифріне еселі сан түсуінің салыстырмалы жиілігін анықтаңыз.

Кесте 6.1

ω	1	2	3	4	5	6
N_ω	7	3	6	5	6	3

Шешуі. Алдымен элементар оқиғалар жиынын құрайық

$$\Omega = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}.$$

A оқиғасы жұп сан түсуін білдірсе, B оқиғасы 3 цифріне еселі сан түсуін білдірсін, онда

$$A = \{\omega_2 = 2, \omega_4 = 4, \omega_6 = 6\} \text{ және } B = \{\omega_3 = 3, \omega_6 = 6\}.$$

Демек, A оқиғасы оқиға орындалуының анықтамасы бойынша 2,4,6 сандары түскенде орындалып, ал 1,3,5 сандары түскен кезде орындалмайды, сол сияқты B оқиғасы 3,6 сандары түскен кезде ғана орындалып, 1,2,4,5 сандары түскен кезде орындалмайды. Демек, оқиғалардың сәйкесінше салыстырмалы жиіліктері

$$r_A = \frac{N_A}{N} = \frac{3 + 5 + 3}{30} = \frac{11}{30} \approx 0,367$$

және

$$r_B = \frac{N_B}{N} = \frac{6+3}{30} = \frac{9}{30} \approx 0,3.$$

6.1 кестесіне оралсақ, ойын сүйегін 30 рет лақтырғанда 1 цифрі 7 рет, 2 цифрі 3 рет және т.с.с. 6 цифрі 3 рет түсуінің барлық мүмкін жағдайлары

$$P_{30}(7,3,6,5,7,3) = \frac{30!}{7! 3! 6! 5! 7! 3!}$$

Осылардың ішінен біреуін келтіріп, A оқиғасының орындалуын (+), орындалмауын (-) таңбасымен белгілеп, әрбір тәжірибе нәтижесін ажыратайық. 6.2-кестенің бірінші жолында тәжірибе нәтижелері көрсетілсе, екінші жолында сәйкесінше A оқиғасының орындалу немесе орындалмауы көрсетілген. Мысалы, тәжірибені бірінші рет орындағанда 1 цифрі түсіп, $1 \notin A$ болғандықтан A оқиғасы орындалмады, ал төртінші рет орындағанда 2 цифрі түсіп, ол жұп болғандықтан элементар оқиға ретінде A оқиғасында жатады да, оның орындалуын қамтамасыз етеді.

Кесте 6.2

1	4	3	2	5	5	1	2	1	3	5	5	3	4	4
-	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+
3	4	5	5	3	1	4	6	3	1	2	6	1	6	1
-	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-

Егер A оқиғасының ықтималдығын классикалық анықтаманы қолданып, есептейтін болсақ $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$. Ал салыстырмалы жиілігі 0,367. Бұл мысалдан салыстырмалы жиілік ықтималдықтан айтарлықтай кіші болғанмен тәжірибелер санын неғұрлым арттырған сайын оқиға жиілігі оқиға ықтималдығына жақындайтындығы үлкен сандар заңы бойынша дәлелденеді (үлкен сандар заңы туралы ақпарат ХХІ тарауында берілген).

Мысал 6.2. Екі симметриялы және біртекті бірдей тиын 13 рет кездейсоқ лақтырылды. Әр лақтыруда кем дегенде бір тиынның таңба жағымен түсуінің (A оқиғасы) нәтижесі 6.3 кестесінде келтірілген. A оқиғасының салыстырмалы жиілігін анықтап, ықтималдықтың практикалық мағынасын түсіндіріңіз. Тәжірибе 13 рет жүргізілгенде A оқиғасының 4 рет пайда болуының барлық мүмкін жағдайларының санын есептеп, бір мысалын келтіріңіз.

Кесте 6.3

ω	Екі симметриялы және біртекті бірдей тиын кездейсоқ лақтырылғанда кем дегенде бір тиын таңба жағымен түсті	Екі симметриялы және біртекті бірдей тиын кездейсоқ лақтырылғанда екі тиын да сан жағымен түсті
N_{ω}	9	4

Шешуі. Алдымен элементар оқиғалар жиынын құрайық

$$\Omega = \{\omega_1 = (T, T), \omega_2 = (T, C), \omega_3 = (C, T), \omega_4 = (C, C)\}.$$

A оқиғасы кем дегенде бір тиынның таңба жағымен түсуін білдірсін, онда

$$A = \{\omega_1 = (T, T), \omega_2 = (T, C), \omega_3 = (C, T)\}.$$

6.3 кестесіне сәйкес A оқиғасының

салыстырмалы жиілігі

$$r_A = \frac{N_A}{N} = \frac{9}{13} \approx 0,6923 .$$

6.3 кестесіне оралсақ, A оқиғасының 13 рет тәжірибе жүргізгенде дәл 9 рет орындалуының барлық мүмкін жағдайлары

$$P_{13}(9,4) = \frac{13!}{9!4!}.$$

Осылардың ішінен біреуін келтіріп, A оқиғасының орындалуын (+), орындалмауын (-) таңбаларымен белгілеп (6.4-кестеде келтірілген), әрбір тәжірибе нәтижесін ажыратайық

Кесте 6.4

№ тәжірибе	1-тиын	2-тиын	Оқиғаның орындалуы
1-тәжірибе	Т	С	+
2-тәжірибе	Т	С	+
3-тәжірибе	Т	Т	+
4-тәжірибе	С	Т	+
5-тәжірибе	С	С	-
6-тәжірибе	С	С	-
7-тәжірибе	Т	Т	+
8-тәжірибе	С	Т	+
9-тәжірибе	С	С	-
10-тәжірибе	Т	Т	+
11-тәжірибе	С	С	-
12-тәжірибе	С	Т	+
13-тәжірибе	Т	Т	+
			+ саны=9 - саны=4

Егер A оқиғасының ықтималдығын классикалық анықтама бойынша есептейтін болсақ, онда $P(A) = \frac{3}{4} = 0,75$. Ал салыстырмалы жиілігі 0,692. Бұнда да, жоғарыдағыдай ықтималдықтың практикалық мағынасы

бойынша тәжірибелер санын неғұрлым көп жүргізсек, солғұрлым оқиға жиілігі оқиға ықтималдығына жақындай түсетіндігін көреміз.

Мысал 6.3. Су қоймасында қанша балық бар екендігін ықтималдықтың классикалық анықтамасы мен практикалық мағынасын қолдана отырып анықтаңыз.

Шешуі. Су қоймасында x балық бар делік. Ау салып, сол ауды тексерген кезде n балық түссін, олар белгіленіп алынып, қайтадан суға жіберіледі. Біраз уақыт өткеннен кейін дәл сондай ауа-райында, дәл сол жерге сол ауды салайық, дәл бірінші реттегі уақыттан кейін ауды тексергенде ішінде белгіленген k балық бар, m балық түссін, онда A арқылы түскен балықтың белгіленген балық болуын білдіретін оқиғаны белгілесек, онда ықтималдықтың практикалық мағынасы бойынша оқиға жиілігі

$$\frac{k}{m},$$

екінші жағынан, суға n балық белгіленіп жіберілгендіктен, ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P(A) = \frac{n}{x}.$$

Бұдан $\frac{k}{m} \approx \frac{n}{x}$, онда $x \approx \frac{mn}{k}$ балық бар екендігін аламыз.

Тапсырмалар

Есеп 6.1. Біртекті материалдан жасалған және симметриялы ойын сүйегі лақтырылады. Элементар оқиғалар жиынын, оқиғалар алгебрасын құрып, тақ ұпай түсуінің ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.2. Төрт баласы бар жанұялардан кездейсоқ жанұя таңдап алынды. Элементар оқиғалар жиынын құрыңыз.

Кездейсоқ таңдалған отбасыда екі қыз болуының ықтималдығын табыңыз (мұндағы ұл және қыз бала туу ықтималдықтары тең деп қабылданады).

Есеп 6.3. Жәшікте 4 ақ, 9 көк және 7 сары бірдей шарлар бар. Элементар оқиғалар жиынын құрып, қораптан ақ шар алудың ықтималдын табыңыз.

Есеп 6.4. Жәшікте a ақ, b көк бірдей шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынып, оның түсі белгіленді.

a) Бірінші алынған шар ақ болса, екінші алынған шардың ақ болу ықтималдылығы қандай?

Жәшіктен барлық шарларды бірінен кейін бірін алып шығарылса,

b) ең соңында қалған шардың ақ болуының ықтималдылығы қандай?

c) екінші алынған шардың ақ болуының ықтималдылығы қандай?

e) Осы есепте $a \geq 2$ болғанда екі шар қатар алсақ, екеуінің де ақ болуының ықтималдылығы қандай?

$a \geq 2, b \geq 2$ болғанда екі шар қатар алғанда, екеуінің де бір түсті болуы ықтималдырақ па, жоқ әртүрлі болуы ықтималдырақ па?

i) $a \geq 2, b \geq 3$ болғанда бес шар қатар алсақ, екеуінің ақ, үшеуінің көк болуының ықтималдылығы қандай?

Есеп 6.5. Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шар бар. Шарлар бірінен кейін бірі кездейсоқ тәсілмен түгелдей алынып, нөмірлері белгіленді.

a) алынған шар қайтадан жәшікке қайтарылған жағдайда;

b) алынған шар қайтадан жәшікке қайтарылмаған жағдайда шарлардың нөмірлері 1 санынан n санына дейін өсу ретімен алыну ықтималдықтарын анықтаңыз.

Есеп 6.6. Біртекті материалдан жасалған және симметриялы екі ойын сүйектері лақтырғанда

а) бірдей ұпай шығуының ықтималдығын табыңыз;

б) ұпайлардың қосындысы 7 санынан аз болмауының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.7. Біртекті материалдан жасалған және симметриялы үш ойын сүйектері лақтырғанда, 11 ұпайдың түсуі ықтималдырақ па, әлде 12 ұпайдың түсуі ықтималдырақ па? Жауаптың себебін түсіндіріңіз.

Есеп 6.8. Қорапта 5 жұп (10 дана) аяқ киім бар. Қораптан кездейсоқ қарамай 2 аяқ киім алынады. Келесі оқиғалардың пайда болу ықтималдығын табыңыз: A - 2 аяқ киім де сол аяққа сәйкес келеді, B - 2 аяқ киімнің біреуі ғана сол аяққа сәйкес келеді, C - 2 аяқ киім де жұп болуы.

Есеп 6.9. МЕКТЕП сөзінің әріптері жазылған 6 карточка бар. Карточкалар бір-бірден алынып рет ретімен қойылады. МЕКТЕП сөзінің шығу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.10. 10 шар кездейсоқ 17 қорапқа салынады. Әрбір қорапта көп дегенде 1 шар жатуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.11. 7 қабатты ғимараттың лифтында 5 адам бар. Адамдардың барлығының бір қабаттан шықпауының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.12. Қорапта 100 шар бар, олардың ішінде r қызыл шар. Қораптан біртіндеп шарлар қайтарусыз алынады.

а) Бірінші шардың,

б) 40-шы шардың,

с) соңғы шардың қызыл болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.13. Қорапта 24 шам бар. Олардың 4-еуі ақаумен. Қайтарусыз кездейсоқ алынған 4 шамның да ақаумен болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.14. n адам кездейсоқ бір қатарда тұрған n орынға отырғызылады. Белгіленген екі адамның қатар отыруының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6.15. k адам кездейсоқ бір қатарда тұрған $n(k < n)$ орынға отырғызылады. k адамның алдын-ала белгіленген k орынға отыруының ықтималдығын табыңыз.