

14 дәріс тақырыбы. Алгоритмдер және есептеу. Алгоритмдік процедураларға қойылатын талаптар. Рекурсивті функциялар.

Алгоритм ұғымы

1. Алгоритм ұғымы - математикада вектор, жиын секілді негізгі ұғымдардың бірі. Негізгі ұғымдардың дәл анықтамасы болмайды. Оларды тек интуициямен қабылдаймыз. Дегенімен, осы параграфта алгоритм ұғымын мағыналық тұрғыдан анықтауға тырысамыз.

Көбінесе алгоритм ұғымын берілген элементке сәйкес элементті берілген нұсқаулар арқылы табу деп түсінеміз.

Бірақ бұл анықтама - математикалық тұрғыдан алғанда дәл анықтама емес. Себебі, есептеу, нұсқау ұғымдарының да анықтамасы берілмеген.

Алгоритм дегеніміз- бұл жағдайда алгоритмдік деп аталатын есептеу процесін кең мағынада белгілейтін нақты ұйғарым. Процесс белгілі бір алгоритм үшін рұқсат етілген бастапқы деректердің белгілі бір жиынтығынан ерікті бастапқы берілістен басталады және осы бастапқы деректермен толық анықталған нәтиже алуға бағытталған.

"Бағанмен" көбейтудің және көп таңбалы ондық сандарды "бұрышпен" бөлудің мектеп әдістері, сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуде белгісіздерді жою әдісі, күрделі функцияны саралау ережесі есептеу алгоритмдерінің мысалдары болып табылады.

"Алгоритм" сөзінің өзі *algorithmi* - IX ғасырдағы Хорезмдік Аль-Хорезми математигінің аты (латын жазуында) шыққан. Ортағасырлық Еуропада алгоритм ондық позициялық сандар жүйесі және ондағы санау өнері деп аталды, өйткені бұл аль-Хорезми трактатының латын аудармасының (XII ғ.) арқасында Еуропа позициялық сандар жүйесімен танысты.

Жалпы алғанда, нәтиже міндетті түрде алынады деп болжанбайды: алгоритмді нақты мүмкін болатын бастапқы деректерге қолдану процесі (яғни, осыдан бастап алгоритмдік процесс) нәтижесіз аяқталуы мүмкін (бұл жағдайда олар нәтижесіз тоқтау туралы айтады) немесе мүлдем аяқталмайды. Егер процесс нәтиже алумен аяқталса (тиісінше аяқталмаса), алгоритм қарастырылып отырған бастапқы деректерге қолданылады (сәйкесінше қолданылмайды) деп айтылады.

2. Алгоритмдерге қойылатын негізгі талаптар.

А. Жоғарыда айтылғандай, алгоритм деректерді өңдейді. Нақты анықталуы керек мәліметтер ұғымын нақтылау қажет.

Алгоритмдер теориясында бастапқы объектілердің шекті жиынтығы бастапқы таңбалардың шекті алфавиті (сандар, әріптер және т.б.) және элементарлықтан басқа объектілерді құру құралдарының шекті жиынтығы түрінде жазылады; индуктивті анықтамалар типтік құрал болып табылады. Алгоритм жұмыс барысында аралық мәліметтер қалыптасады, олар да алгоритмдік өңдеуден өтеді.

Б. Алгоритм жеке қарапайым қадамдардан немесе әрекеттерден тұрады, әрине, алгоритм жасалған көптеген түрлі қадамдар. Алгоритм қадамдарының реттілігі анықталады, яғни әр қадамнан кейін келесі қадам орындалады немесе тоқтайды, содан кейін алгоритмнің жұмысы аяқталды деп саналады.

В. Алгоритм нәтижелілікті талап етеді, яғни нәтижемен нені қарастыру керектігін көрсете отырып, қадамдардың шекті санынан кейін тоқтату (бастапқы деректерге байланысты). Атап айтқанда, белгілі бір алгоритм белгілі бір мәселені шешетінін көрсету үшін алгоритм бізді қызықтыратын осы мәселенің барлық бастапқы деректері үшін қадамдардың шекті санынан кейін тоқтайтынына көз жеткізу керек.

Г. Алгоритмді қарапайым қадамдардың реттілігі ретінде қарастыру әр қадамдағы шектеулі өзгерістермен, басқаша айтқанда, түрлендірулердің локализациясымен байланысты.

Бұл бастапқы немесе аралық нысанды түрлендіру оның жеке бөліктеріндегі өзгерістерден тұрады дегенді білдіреді: көп таңбалы сандар үшін - көрші цифрларда, алфавиттегі сөздер үшін - шектеулі ұзындықтың белгілі бір тобында, граф үшін - жеке шыңның белгілі бір аймағында (шектеулі өлшемдердің кіші графында). Мұндай жағдайларда типтердің шағын (объектінің мүмкін өлшемдерімен салыстырғанда) жергілікті қайта құру ережелерін енгізуге болады.

"Жалпы түрдегі" проблема ұғымы **жаппай алгоритмдік проблема** ұғымын қолдана отырып нақтыланады, онда бір типтегі жалғыз тапсырмалардың шексіз сериясын шешу үшін бірыңғай әдісті (алгоритм) табу қажет. Мұндай алгоритм болмаған кезде, олар бұл жаппай проблема шешілмейді дейді.

Алгоритмдік процестің көптеген эвристикалық тұжырымдамаларына сүйене отырып, әртүрлі жолдармен: сандық функциялардың мәндерін есептеу, сызықтық реттелген жүйелер мен басқа объектілердің жергілікті түрлендірулері, қарапайым операциялардың реттілігін орындау бойынша қадамдық нұсқауларды рәсімдеу.

Біз алгоритмнің нақты тұжырымдамасына екі көзқарасты қарастырамыз: рекурсивті функциялар және Тьюринг машиналары.

Рекурсивті функциялар

$y = f(x_1, \dots, x_n)$, $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}^0$, мұндағы $\mathbb{N}^0 = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ - натурал (бүтін теріс емес) сандар жиынтығы, функцияларын қарастырамыз. Осылайша, айнымалылар да функция мәні де натурал сандар болады.

1. Келесі функциялар **бастапқы** деп аталады:

- 1) $Z(x) = 0$ - нөл-функция ("zero"), яғни тұрақты 0;
- 2) $N(x) = "x + 1"$ - келесілік функциясы ("next");
- 3) $I_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$ - селекторлық функциялар, мұндағы $k = 1, 2, \dots, n$.

Бастапқы функциялардан біз **функционалды операторлар** деп атауға болатын операциялар арқылы көптеген басқа функцияларды құрамыз.

h функциясы $f, g_1, \dots, g_n$ функцияларына S суперпозиция операторын қолдану арқылы алынады деп айтылады (белгіленуі: $h = S(f, g_1, \dots, g_n)$), егер болса

$$h(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Мысалдар. Бүтін тұрақтылар бастапқы $Z(x)$ және $N(x)$ функциялардың суперпозицияларымен енгізіледі: $N(Z(x)) = N(0) = 1$; $N(N(Z(x))) = N(1) = 2$ және т.б. $Z(f(x)) = 0$ кез келген $f(x)$ функция үшін. 3-ке тең болатын $I_1(3, 2)$ функциясын $I_1(N(N(N(Z(x))))$, $N(N(Z(x))))$ өрнегінің қысқартылған белгісі ретінде қарауға болады; сонда-ақ $I_2(3, 2) = 2$. $f(x, y)$ функциясынан $g(x, y) = f(y, x)$ функциясын келесі суперпозициямен алуға болады:

$$g(x, y) = f(I_2(f(x, y)), I_1(f(x, y))).$$

2. $(n+1)$ айнымалылардан тәуел f функциясы **қарапайым рекурсия** операторын n айнымалылардан тәуел g және $(n+2)$ айнымалылардан тәуел h функцияларға қолдану арқылы алынады деп айтылады (белгілеу: $f = R(g, h)$), егер

- 1) $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$,
 - 2) $f(x_1, \dots, x_n, k+1) = h(x_1, \dots, x_n, k, f(x_1, \dots, x_n, k))$, $k \in \mathbb{N}^0$.
- $h(x_1, \dots, x_n, k, z)$

Егер $n = 0$ болса

- 1) $f(0) = g = \text{const}$,
- 2) $f(k+1) = h(k, f(k))$, $k \in \mathbb{N}^0$. $\rightarrow h(k, z)$ – екі айнымалыдан тәуел функция

Егер $n = 1$ болса

$$1) f(x, 0) = g(x),$$

$$2) f(x, k+1) = h(x, k, f(x, k)), k \in \mathbb{N}^0. \rightarrow h(x, k, z) - \text{үш айнымалыдан тәуел функция}$$

Мысал 1

$$g = 1 = N(Z(1)) \text{ тұрақты, } n = 0$$

$$h(k, z) = k + 2z$$

$$f(k) = ?$$

$$f(0) = g = 1$$

$$f(k+1) = h(k, f(k)) = k + 2f(k)$$

$$f(1) = f(0+1) = h(0, f(0)) = 0 + 2f(0) = 0 + 2 = 2$$

$$f(2) = f(1+1) = h(1, f(1)) = 1 + 2f(1) = 1 + 4 = 5$$

$$f(3) = f(2+1) = h(2, f(2)) = 2 + 2f(2) = 2 + 10 = 12$$

$$f(4) = f(3+1) = h(3, f(3)) = 3 + 2f(3) = 3 + 24 = 27$$

$$f(5) = f(4+1) = h(4, f(4)) = 4 + 2f(4) = 4 + 54 = 58$$

$$f(0) = 1 = g = \text{const}, n=0 \quad h(k, z) = k+z.$$

$$f(k+2) = f(k+1) + f(k) \text{ болуы керек!}$$

$$(f(k+1), f(k))$$

$$f(k) = I_2(f(k+1), f(k))$$

$$p(k) = f(k+1) = f(N(k))$$

$$f(0) = 1$$

$$p(0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p(k+1) \\ f(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(k) + f(k) \\ p(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(k) \\ f(k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p(0+1) \\ f(0+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) + f(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p(1+1) \\ f(1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) + f(1) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p(k+1) \\ f(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(k) + f(k) \\ p(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(p(k), f(k)) + I_2(p(k), f(k)) \\ I_1(p(k), f(k)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(k) &= f(k+1) \\ p(k+1) &= f(k+2) = f(k+1) + f(k) \end{aligned}$$

$$f(k+2) = f(k+1) + f(k)$$

$$f(0)=1, f(1)=1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Бұл анықтамадағы рекурсия f функциясының шеткі айнымалысы бойынша жүреді және индуктивті анықтау әдісін білдіреді: $k = 0$ кезіндегі функцияның мәнін біле отырып, біз $k = 1$ кезіндегі функцияның мәнін табамыз, сосын $k = 2$ кезінде жалғастырамыз, т.б.

Функция қарапайым рекурсивті деп аталады (қысқартылған қ/р), егер оны бастапқы функцияларға суперпозиция және қарапайым рекурсия операторларының шектеулі санын қолдану арқылы алуға болады.

Қарапайым рекурсивті функциялардың кейбір мысалдарын қарастырамыз.

$$1) S(x, 0) = g(x) = x + 0, n = 1.$$

2) $S(x, y + 1) = N(S(x, y)) = S(x, y) + 1 = x + y + 1$, яғни $x + (y + 1)$

$$h(x,y,z) = N(z) = N(I_3(x,y,z))$$

1) $P(x, 0) = Z(x)$, яғни $x \cdot 0 = 0$

2) $P(x, y + 1) = S(P(x, y), x) = xy + x$, t.e. $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$

$$h(x,y,z) = S(I_3(x,y,z), I_1(x,y,z))$$
$$x \notin A \text{ болғанда } c_A(x) = 0$$

Анықтама. Характеристикалық функциясы жалпы рекурсивті болатын жиынды рекурсивті жиын деп атаймыз.

Былайша айтқанда, рекурсивті функциялар үшін кез келген элементтің осы жиынға тиістілігін анықтайтын алгоритм болу керек.

Мысалы, жұп сандар жиыны – рекурсивті жиын. Бос жиын мен барлық натурал сандар жиынының рекурсивті екенін байқау қиын емес.

Предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ қарапайым рекурсивті деп аталады, егер оның сипаттамалық (характеристикалық) функциясы к/р болса

$$\chi_p(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{if } P(x_1, \dots, x_n) = \text{true} \\ 0, & \text{if } P(x_1, \dots, x_n) = \text{false} \end{cases}$$

$\chi_p(x_1, \dots, x_n)$ функциясы $x_1, \dots, x_n$ натурал мәнді айнымалылардың 0 немесе 1 мәнді функциясы ретінде қарастырылады.

Қасиет 1. Егер $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n)$ - к/р предикаттары болса, онда $\neg P$, $P \& Q$, $P \vee Q$, $P \oplus Q$, $P \sim Q$, $P \rightarrow Q$ к/р предикаттары болады.

Қасиет 2. К/р предикаттар $P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_k(x_1, \dots, x_n)$ үшін кез келген $i \neq j$ кезінде

$P_i \& P_j = 0$ және $P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_k \equiv 1$ болсын, яғни $x_1, \dots, x_n$ айнымалыларының кез-келген жиынында $P_1, \dots, P_k$ предикаттарының біреуі және тек қана біреуі 1-ге тең.

Содан кейін $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)$ к/р функциялары болсын. Онда

[illegible]

функциясы да қарапайым рекурсивті болады.

$k = 2$ кезінде f функциясы g_1, g_2 функцияларына **шартты операторды** қолдану арқылы алынады деп айтылады.

Касиет 1. Егер $f(x_1, \dots, x_n, y)$ - к/р функция болса, онда шектеулі сома

$$g(x_1, \dots, x_n, a) = \sum_{v \in a} f(x_1, \dots, x_n, y), \text{ мўнда } f(x_1, \dots, x_n, 0) = 0 \text{ к/р функция болады.}$$

Қасиет 2. Егер $f(x_1, \dots, x_n, y)$ - к/р функция болса, онда шектеулі көбейту

$g(x_1, \dots, x_n, a) = \prod_{y < a} f(x_1, \dots, x_n, y)$, мұнда $f(x_1, \dots, x_n, 0) = 1$ к/р функция болады.

Қасиет 3. Егер $P(x_1, \dots, x_n, y)$ - к/р предикат болса, онда шектеулі квантор $Q(x_1, \dots, x_n, a) = \bigvee_{y < a} P(x_1, \dots, x_n, y)$, мұнда $P(x_1, \dots, x_n, 0) = 1$ к/р предикат болады.

Қасиет 4. Егер $P(x_1, \dots, x_n, y)$ - к/р предикат болса, онда шектеулі квантор $Q(x_1, \dots, x_n, a) = \bigwedge_{y < a} P(x_1, \dots, x_n, y)$, мұнда $P(x_1, \dots, x_n, 0) = 0$ к/р предикат болады.

$P(x_1, \dots, x_n, y)$ предикатына **минимизацияның шектеулі операторын (μ -операторы)** қолдану нәтижесі деп $\bigvee_{t < y} P(x_1, \dots, x_n, t) = 0$ және $P(x_1, \dots, x_n, y) = 1$ болатындай $y \in \{0, 1, \dots, z\}$

мәніне тең болатын $f(x_1, \dots, x_n, z)$ функциясы аталады. Егер барлық $y \in \{0, 1, \dots, z\}$ үшін $P(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ болса, онда f функциясы барлық жерде анықталған болатындай $f(x_1, \dots, x_n, z) = z + 1$ деп қабылдаймыз. Белгіленуі $f(x_1, \dots, x_n, z) = \mu_{y \leq z} P(x_1, \dots, x_n, y)$.

Атап айтқанда, $n = 0$ кезінде $\mu_{y \leq z} P(y)$ функциясы $c < z$ - мен тұрақты, сондай ақ $P(c) = 1$ және $P(t) = 0$, егер $t < c$ болса.

$P(x_1, \dots, x_n, y)$ предикатына **минимизацияның шектелмеген операторын (μ_y -операторы)** қолдану нәтижесі деп $\bigvee_{t < y} P(x_1, \dots, x_n, t) = 0$ және $P(x_1, \dots, x_n, y) = 1$ болатындай

$y \in N^0$ мәніне тең болатын $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы аталады. Егер барлық $y \in N^0$ үшін $P(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ болса, онда f функциясы анықталмаған деп аталады.

Белгіленуі $f(x_1, \dots, x_n) = \mu_y P(x_1, \dots, x_n, y)$.

Сол анықтаманы басқаша жазуға болады:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu_y P(x_1, \dots, x_n, y) = \min_{P(x_1, \dots, x_n, t)=1} \{0, 1, \dots, t, \dots, \infty\}$$

$g(x_1, \dots, x_n, y)$ функциясына шектелмеген минимизация операторын (μ_y -операторы) y айнымалысы бойынша қолдану нәтижесі деп $\mu_y (g(x_1, \dots, x_n, y) = z)$ болатындай z мәніне тең болатын $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы аталады.

$$g(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{x_2}$$

$$1 - \frac{y}{x_2} = x_1$$

$$x_2 - y = x_2 x_1$$

$$y = x_2(1 - x_1)$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_2 \neq 0, x_1 = 1 \\ Ndef, & \text{if } x_2 \neq 0, x_1 > 1 \\ Ndef, & \text{if } x_2 = 0 \\ x_2, & \text{if } x_1 = 0 \end{cases}$$

$$g(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{x_2}$$

$$1 - \frac{x_1}{y} = x_2$$

Бұл теңдікте y айнымалысы бойынша минимизация орындалады. Яғни $y \in \{0, 1, \dots\}$. Бірақ $y = 0$ болған кезде теңдік орындалмайды, сондықтан x_2 айнымалы бойынша минимизация жүргізілмейді.

Егер келесі жағдай болса

$$g(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_1}{x_2}$$

онда

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 - \frac{x_1}{x_2} = x_3 \\ 0, \text{ if } 1 - \frac{x_1}{x_2} = x_3 \\ \text{Ndef in other cases} \end{cases}$$

Функция **ішінара рекурсивті** (i/p) деп аталады, егер оны S (суперпозиция), R (қарапайым рекурсия) және минимизацияның шектеулі және шексіз операторлардың шектеулі санын бастапқы функцияларға қолдану арқылы алуға болады.

Ішінара рекурсивті функция ұғымы белгілі бір мағынада алгоритмдік тұрғыдан жеткілікті екендігі белгілі болды.

Черч тезисі: тиімді есептелетін кез-келген функция ішінара рекурсивті.

Жаттығу: Берілген функцияның қарапайым рекурсивті болатынын дәлелде

а) $f(k) = k!$

Бұл жерде $n=0$.

$$f(0) = 1 = N(0) = g$$

$$f(k+1) = h(k, f(k)) = P(N(k), f(k)) = (k+1)f(k).$$

$$h(k, z) = P(N(k), z)$$

б) $f(x, k) = x^k + 2x$, $n=1$

әуелі

$$f_1(x, k) = x^k \text{ қарастырамыз}$$

$$f_1(x, 0) = 1 = N(Z(x)) = g(x)$$

$$f_1(x, k+1) = x^{k+1} = x x^k = x f_1(x, k) = P(x, f_1(x, k)) \rightarrow$$

$$\rightarrow h(x, k, z) = xz = P(x, z) = P(I_1(x, k, z), I_3(x, k, z))$$

яғни $f_1(x, k)$ к/р функция

$$f_2(x, k) = 2x = x + x = S(x, x) = S(I_1(x, k), I_1(x, k))$$

$$f(x, k) = S(f_1(x, k), f_2(x, k))$$

$$в) f(x) = sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x = 0 \\ 1, \text{ егер } x > 0 \end{cases},$$

$n=0$,

$$f(0) = sg(0) = 0 = \text{const} = g.$$

$$f(k+1) = sg(k+1) = N(Z(k)) = N(Z(I_1(x, sg(x)))) = h(k, f(k))$$

$$h(k, z) = N(Z(I_1(k, z)))$$