

Тақырыбы. Ықтималдықтар теориясының классикалық анықтамасы

Мысал 5.1. Тәжірибе идеалды тиынды бір рет лақтырудан тұрсын. Оқиғалар алгебрасын және онда анықталған ықтималдықты анықтаңыз.

Шешуі. Тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері екеу – тиын не T (Таңба), не C (Сан) жағымен түседі. Демек, $\Omega = \{\omega_1 = T, \omega_2 = C\}$. Ω – ақырлы болғандықтан, оқиғалар алгебрасы Ω жиынының барлық жиыншаларынан құралған жиын болады: $F = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}$. Енді ықтималдықты, яғни оқиғалар алгебрасында анықталған функцияны анықтайық. Функция анықтамасына сәйкес:

$$\{T\} \xrightarrow{P} P(\{T\}), \{C\} \xrightarrow{P} P(\{C\}).$$

Ары қарай ықтималдықтың $P(\Omega) = 1$ қасиетін, ақырлы аддитивтілігін және элементар оқиғалардың теңмүмкінділігін қолданып,

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{3-акс.}{=} P(\Omega) = P(\{T, C\}) = P(\{T\} + \{C\}) \stackrel{\{T\} \cap \{C\} = \emptyset, 2-акс.}{=} \\ &= P(\{T\}) + P(\{C\}) \stackrel{P(\{T\}) = P(\{C\})}{=} 2P(\{C\}) \end{aligned}$$

теңдігінен

$$P(\{T\}) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$$

келеміз. Енді бос жиындағы ықтималдықтың мәнін анықтайық.

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{3-акс.}{=} P(\Omega) \\ &= P(\Omega \cup \emptyset) \stackrel{\Omega \cap \emptyset = \emptyset, 2-акс.}{=} P(\Omega) + P(\emptyset) \stackrel{3-акс.}{=} 1 \\ &\quad + P(\emptyset) \end{aligned}$$

теңдігінен

$$P(\emptyset) = 1 - 1 = 0.$$

Сонымен, $F = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}$ және $P(\emptyset) = 0$,
 $P(\{T\}) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$, $P(\Omega) = 1$.

5.1 мысалда тиынға идеалды болу шарты қойылмаса, $P(\{T\}) = P(\{C\})$ теңдігі орындалмайды да, олардың ықтималдықтары қосындысы 1 санына тең кез келген екі оң сан болуы мүмкін.

Мысал 5.2. Тәжірибе алдымен идеалды тиынды, кейін идеалды ойын сүйегін бір-бір реттен лақтырудан тұрсын. Оқиғалар алгебрасын және онда анықталған ықтималдықты анықтаңыз.

Шешуі. Элементар оқиғалар жиыны

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(a, b): a \in \{T, C\}, b \in \{1, 2, \dots, 6\}\} \\ &= \{(T, 1), (C, 1), \dots, (T, 6), (C, 6)\}.\end{aligned}$$

Комбинаториканың негізгі ережесі бойынша тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері $|\Omega| = 2 \cdot 6 = 12$. Онда оқиғалар алгебрасы $C_{12}^0 = 1$ бос жиыннан, барлық бір элементті C_{12}^1 жиындардан, барлық екі элементті C_{12}^2 жиындардан және т.с.с. барлық 11 элементті C_{12}^{11} және 12 элементті Ω жиынының өзінен тұрады:

F

$$= \{\emptyset, \{(T, 1)\}, \{(C, 1)\}, \dots, \{(C, 6)\}, \{(T, 1), (C, 1)\}, \{(T, 1), (C, 2)\}, \dots, \Omega\}$$

Сонда барлық мүмкін оқиғалар саны, яғни F оқиғалар алгебрасындағы барлық элементтер саны Ньютон биномының формуласы бойынша

$$C_{12}^0 + C_{12}^1 + \dots + C_{12}^k + \dots + C_{12}^{12} = (1 + 1)^{12} = 2^{12},$$

сонымен $|A| = 2^{12}$ санына тең.

Ықтималдықты анықтау үшін, яғни оқиғалар алгебрасында анықталған функцияны анықтау үшін

оның әрбір бір элементті жиындағы мәндерін анықтау жеткілікті:

$$P(\{(T, 1)\}) = p_1, P(\{(C, 1)\}) = p_2, \dots, P(\{(C, 6)\}) = p_{12},$$

онда ықтималдық аксиомалары, оның ішінде ақырлы аддитивтілік қасиеті мен элементар оқиғалардық теңмүмкінділігін қолданып,

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= P(\{(T, 1), (C, 1), \dots, (T, 6), (C, 6)\}) \\ &= P(\{(T, 1)\}) + P(\{(C, 1)\}) + \dots \\ &\quad + P(\{(C, 6)\}) = p_1 + p_2 + \dots + p_{12} \\ &= \underbrace{p + p + \dots + p}_{12 \text{ рет}} = 12p \end{aligned}$$

теңдігінен $p = \frac{1}{12}$ ықтималдығын аламыз.

Сонымен,

$$P(\{(T, 1)\}) = P(\{(C, 1)\}) = \dots = P(\{(C, 1)\}) = \frac{1}{12}.$$

Ал қалған оқиғалардың ықтималдығы ондағы элементар оқиғаларға емес, олардың тек санына тәуелді, атап айтқанда, кез келген оқиғаның ықтималдығы оны құрайтын элементар оқиғалар санының 12-ге қатынасына тең $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 12, 1 \leq k \leq 12)$:

$$B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in F \Rightarrow P(B) = \frac{k}{12}.$$

Ескерту 5.2. Тағы да ескертеміз F оқиғалар алгебрасында немесе σF оқиғалар σ -алгебрасында ықтималдық анықтау үшін тек бір элементті оқиғалардағы ықтималдықты білу жеткілікті тұжырымы Ω элементар оқиғалар жиыны арқылы немесе саналымды болған жағдайда орындалады.

Мысал 5.3. Қызыл, сары және жасыл шар жатқан қораптан кездейсоқ бір шар шығарылды. Элементар

оқиғалар жиыны мен оқиғалар алгебрасын құрыңыз.
Қораптан жасыл шар алудың ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері:

ω_1 - қораптан қызыл шар шығарылды,

ω_2 - қораптан сары шар шығарылды,

ω_3 - қораптан жасыл шар шығарылды.

Демек элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{\omega_1 - \text{қораптан қызыл шар шығарылды, } \omega_2 - \\ \text{қораптан сары шар шығарылды,} \\ \omega_3 - \text{қораптан жасыл шар шығарылды}\}.$$

Ал F оқиғалар алгебрасы $2^3 = 8$ оқиғадан тұрады:

$$F = \\ \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\} = \\ \Omega\}.$$

Егер B оқиғасы қораптан жасыл шар алуды білдірсе, яғни $B = \{\omega_3\}$ болса, онда ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}.$$

Мысал 5.4. Айнұр дүкеннен досының туған күніне 5 (3 қызыл, 2 көк) гүлден 2 қызыл гүл таңдамақшы болды. Айнұрдың 2 қызыл гүл таңдауының (A оқиғасы) ықтималдығын есептеңіз.

Шешуі. Тәжірибе 5 (3 қызыл, 2 көк) гүлден 2 қызыл гүл таңдаудан тұрады. Үш қызыл гүлді 1-қызыл, 2-қызыл, 3-қызыл, екі көк гүлді 1-көк, 2-көк деп белгілейік. Элементар оқиғалардың жалпы түрі:

$$\omega = (1\text{-ші таңдалған гүл, } 2\text{-ші таңдалған гүл}).$$

Сонда тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері он:

$\omega_1 = (1\text{-қызыл}, 1\text{-көк}), \omega_2 = (1\text{-қызыл}, 2\text{-көк}),$
 $\omega_3 = (2\text{-қызыл}, 1\text{-көк}),$
 $\omega_4 = (2\text{-қызыл}, 2\text{-көк}), \omega_5 = (3\text{-қызыл}, 1\text{-көк}), \omega_6 = (3\text{-қызыл}, 2\text{-көк}),$
 $\omega_7 = (1\text{-қызыл}, 2\text{-қызыл}), \omega_8 = (1\text{-қызыл}, 3\text{-қызыл}),$
 $\omega_9 = (2\text{-қызыл}, 3\text{-қызыл}), \omega_{10} = (1\text{-көк}, 2\text{-көк}).$

Онда Ω элементар оқиғалар жиыны 10 элементтен тұрады. Олардың ішінді A оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар саны – 3:

$\omega_7 = (1\text{- қызыл}, 2\text{- қызыл}), \omega_8 = (1\text{- қызыл}, 3\text{- қызыл}),$
 $\omega_9 = (2\text{- қызыл}, 3\text{- қызыл}).$

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша, A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

Мысал 5.5. 2 адамның кездейсоқ 6 вагондық поездға отырулары бақыланады. Элементар оқиғалар жиыны мен екі адамның жұп нөмірлі вагонға отырғызылуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Элементар оқиғалардың жалпы түрі – (a, b) , мұндағы: a – 1- адамның отырған вагон нөмірі, b – 2- адамның отырған вагон нөмірі. Адамдардың 6 вагондық поездға отыруының барлық мүмкін жағдайлары, яғни элементар оқиғалар жиынын төмендегі кесте түрінде келтірейік:

a	b					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)

5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Сонда элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{\omega_1 = (1,1), \omega_2 = (1,2), \dots, \omega_{35} = (6,5), \omega_{36} = (6,6)\}.$$

болып, ондағы элементтер саны 6 элементтен 2 элемент бойынша алынған қайтарумен жүргізілген алмастырулар санына тең

$$|\Omega| = \tilde{A}_6^2 = 6^2 = 36.$$

Ал A оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар 3 элементтен 2 элемент бойынша алынған қайтарумен жүргізілген алмастырулар, яғни

$$A = \{\omega_8 = (2,2), \omega_{10} = (2,4), \omega_{12} = (2,6), \omega_{20} = (4,2), \omega_{22} = (4,4),$$

$$\omega_{26} = (4,6), \omega_{32} = (6,2), \omega_{34} = (6,4), \omega_{36} = (6,6)\}$$

бұндай элементар оқиғалардың саны

$$|A| = \tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

тең. Онда A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Мысал 5.6. Жұлдыздың қалтасында пішіні мен салмағы бірдей 1 теңгелік 3 тиын (оларды $1_1, 1_2, 1_3$ арқылы белгілейік), 2 теңгелік 2 тиын (оларды $2_1, 2_2$ арқылы белгілейік) бар. Жұлдыз қалтасына қарамай 2 тиынды келесі қалтасына салды. 1 теңгелік үш тиынның бір қалтада жатуының ықтималдығын табыңыз. Ал

алынған не қалған тиындардың тек 1 теңгеліктер болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелерін кесте түрінде келтірейік:

Элементар оқиғалар	Қалтадан алынуы мүмкін тиын	Қалтада қалған тиын
ω_1	$1_1 1_2$	$1_3 2_1 2_2$
ω_2	$1_1 1_3$	$1_2 2_1 2_2$
ω_3	$1_1 2_1$	$1_2 1_3 2_2$
ω_4	$1_1 2_2$	$1_2 1_3 2_1$
ω_5	$1_2 1_3$	$1_1 2_1 2_2$
ω_6	$1_2 2_1$	$1_1 1_3 2_2$
ω_7	$1_2 2_2$	$1_1 1_3 2_1$
ω_8	$1_3 2_1$	$1_1 1_2 2_2$
ω_9	$1_3 2_2$	$1_1 1_2 2_1$
ω_{10}	$2_1 2_2$	$1_1 1_2 1_3$

Сонымен, Ω элементар оқиғалар жиыны 10 элементар оқиғадан тұрады. Ал A оқиғасының, яғни барлық 1 теңгелік тиындардың бір қалтада жатуына қолайлы элементар оқиғалар біреу ғана, ол – ω_{10} . Демек, ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P(A) = \frac{1}{10}.$$

B оқиғасы қалтада алынған не қалған тиындар тек 1 теңгеліктер болуын құрайтын элементар оқиғалар саны 4, оларды тізіп жазатын болсақ,

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_{10}\}.$$

Тағы да классикалық анықтама бойынша

$$P(B) = \frac{4}{10}.$$

Мысал 5.7. 52 картадан тұратын карталар біртіндеп, бірінен соң бірі қойылады. 4 тұздың қатар тұруының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{\omega = (a_1, \dots, a_{52}): a_i \in \{k_1, \dots, k_{52}\}, a_j \neq a_l (j \neq l; i, j, l = 1, 2, \dots, 52)\}.$$

Ω жиынының элементтер саны 52 элемент бойынша алынған орналыстырулар санына тең, яғни $|\Omega| = 52!$. А оқиғасы 4 тұздың қатар тұруы болсын, онда

$$A = \{\omega = (a_1, \dots, a_{52}): a_i \in \{k_1, \dots, k_{52}\}, a_j \neq a_l (j \neq l; i, j, l = 1, 2, \dots, 52), a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+3} = T (m = 1, 2, \dots, 49)\}.$$

Төрт тұз алғашқы 4 орында тұрсын, онда олардың алғашқы орында тұруының $4!$ мүмкіндігі бар, ал бұл жағдайда қалған 49 картаның 5 пен 52 орындарының арасында тұруларының $48!$ мүмкіндіктері бар. Демек, бұл жағдайда $4!48!$ мүмкіндік бар. Бірақ төрт тұз 2-5, 3-6, ..., 49-52 орындарда да тұрулары мүмкін, сондықтан $|A| = 49 \cdot 4!48!$. Онда

$$P(A) = \frac{49 \cdot 4!48!}{52!}.$$

Мысал 5.8. $n(n \leq 365)$ студенттің ішінде кемінде екеуінің туған күндері бір күнде болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Алдымен элементар оқиғалар жиынын құрайық (жылына 365 күн бар деп есептеп, a_j – j -студенттің туған күнін білдірсін)

$$\Omega = \{\omega = (a_1, \dots, a_n): a_j \in \{1, 2, \dots, 365\} (j = 1, 2, \dots, n)\}.$$

A оқиғасы n студенттің ішінде кемінде екеуінің туған күндері бір күнде болуын білдірсе, онда

$$A = \{\omega = (a_1, \dots, a_n): a_j \in \{1, 2, \dots, 365\} (j = 1, 2, \dots, n), \exists l, k \in \{1, 2, \dots, n\}, l \neq k: a_l = a_k\}.$$

Ал A оқиғасына қарама-қарсы оқиға

$$\bar{A} = \{\omega = (a_1, \dots, a_n): a_j \in \{1, 2, \dots, 365\} (j = 1, 2, \dots, n), \forall l, k \in \{1, 2, \dots, n\}, a_l \neq a_k\}$$

барлық n студенттің туған күндері әртүрлі күндері болатындығын көрсетеді. A және $\bar{A}$ жиындары өзара қиылыспайтын болғандықтан ықтималдықтың ақырлы аддитивтілік қасиеті бойынша

$$1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Демек,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

$\bar{A}$ оқиғасының ықтималдығын классикалық анықтама бойынша есептеу үшін $\Omega, \bar{A}$ жиындарындағы элементар оқиғалар санын анықтайық. Комбинаториканың негізгі ережесі бойынша әр студент 365 күннің кез келгенінде туу мүмкін болғандықтан

$$|\Omega| = \underbrace{365 \cdot \dots \cdot 365}_{n \text{ рет}} = 365^n$$

және әр студент туған күні әртүрлі күнге түскендіктен

$$|\bar{A}| = A_{365}^n.$$

Онда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

Мысал 5.9. 6 ойын сүйегі кездейсоқ лақтырылады. Қос-қостан бірдей үш сандар жұбы пайда болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Алдымен элементар оқиғалар жиынын құрайық

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6): a_j \in \{1, 2, \dots, 6\} (j = 1, 2, \dots, 6)\},$$

мұндағы элементар оқиғалар реттелмеген таңдамалар болып табылады. Ал A оқиғасы үшін

$$A = \{\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6): a_j \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\exists a, b, c \in \{1, 2, \dots, 6\}, \exists i, j: a_i = a_j = a, \exists l, k: a_k = a_l = b, \exists m, n: a_m = a_n = c,$$

$$i, j, l, k, m, n \in \{1, 2, \dots, 6\}\}.$$

Ω жиынының элементтер саны үшін 6 элементтен 6 элемент бойынша жүргізілген реттелген орналастырулар санына тең $|\Omega| = \tilde{A}_6^6 = 6^6$. Енді A оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санын табайық. Алдымен түсетін үш сандар өзара тең болмаулары қажет. Демек алты элементтен 3 элемент таңдауымыз қажет. Бұл реттелмеген қайтарусыз таңдама a, b, c үш элемент таңдадық делік оларды 6 орынға орналастырудың $P_6(2, 2, 2) = \frac{6!}{2!2!2!}$ саны бар. Демек, $|A| = C_6^3 P_6(2, 2, 2)$. Сонымен, A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_6^3 P_6(2, 2, 2)}{\tilde{A}_6^6}.$$

Тапсырмалар

Есеп 5.1. Біртекті материалдан жасалған симметриялы ойын сүйегі лақтырылады. Элементар оқиғалар жиынын, оқиғалар алгебрасын құрып, тақ ұпай түсуінің ықтималдығын табыңыз.

Есеп 5.2. Төрт баласы бар жанұялардан кездейсоқ жанұя таңдап алынды. Элементар оқиғалар жиынын құрыңыз. Кездейсоқ таңдалған отбасыда екі қыз болуының ықтималдығын табыңыз (мұндағы ұл және қыз бала туу ықтималдықтары тең деп қабылданады).

Есеп 5.3. Жәшікте 4 ақ, 9 көк және 7 сары бірдей шарлар бар. Элементар оқиғалар жиынын құрып, қораптан ақ шар алудың ықтималдығын табыңыз.

Есеп 5.4. Жәшікте a ақ, b көк бірдей шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынып, оның түсі белгіленді.

a) Бірінші алынған шар ақ болса, екінші алынған шардың ақ болу ықтималдығы қандай?

Жәшіктегі барлық шарлар бірінен кейін бірін алынып шығарылса,

b) ең соңында қалған шардың ақ болуының ықтималдығы қандай?

c) екінші алынған шардың ақ болуының ықтималдығы қандай?

d) Осы есепте $a \geq 2$ болғанда екі шар қатар алсақ, екеуінің де ақ болуының ықтималдығы қандай?

e) $a \geq 2, b \geq 2$ болғанда екі шар қатар алғанда, екеуінің де бір түсті болуы ықтималдырақ па, жоқ әртүрлі болуы ықтималдырақ па?

f) $a \geq 2, b \geq 3$ болғанда бес шар қатар алсақ, екеуінің ақ, үшеуінің көк болуының ықтималдығы қандай?

Есеп 5.5. Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шар бар. Шарлар бірінен кейін бірі кездейсоқ тәсілмен түгелдей алынып, нөмірлері белгіленді.

a) алынған шар қайтадан жәшікке қайтарылған жағдайда;

б) алынған шар қайтадан жәшікке қайтарылмаған жағдайда шарлардың нөмірлері 1 санынан n санына дейін өсу ретімен алыну ықтималдықтарын табыңыз.

Есеп 5.6. Біртекті материалдан жасалған және симметриялы екі ойын сүйектері лақтырғанда

а) бірдей ұпай шығуының ықтималдығын табыңыз;

б) ұпайлардың қосындысы 7 санынан аз болмауының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 5.7. Біртекті материалдан жасалған және симметриялы үш ойын сүйектері лақтырғанда, 11 ұпайдың түсуі ықтималдырақ па, әлде 12 ұпайдың түсуі ықтималдырақ па? Жауаптың себебін түсіндіріңіз.

Есеп 5.8. Қорапта 5 жұп (10 дана) аяқ киім бар. Қораптан кездейсоқ қарамай 2 аяқ киім алынады. A – 2 аяқ киім де сол аяққа сәйкес келуінің, B – 2 аяқ киімнің біреуі ғана сол аяққа сәйкес келуінің, C – 2 аяқ киімнің жұп болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 5.9. МЕКТЕП сөзінің әріптері жазылған 6 карточка бар. Карточкалар бір-бірден алынып рет ретімен қойылады. МЕКТЕП сөзінің шығу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 5.10. Ω элементар оқиғалар жиыны мен ықтималдықтары сәйкесінше $\frac{1}{2}$ мен $\frac{1}{3}$ сандарына тең болатын A және B оқиғалары берілсін.

а) A және B оқиғалары өзара қиылыспайды;

б) $B \subset A$;

с) $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

жағдайларының әрқайсысы үшін $\bar{A} \cap B$ оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 5.11. Бірінші студентінің емтиханды тапсырмауының ықтималдығы 0,5, екінші студентінің емтиханды тапсырмауының ықтималдығы 0,2 және екеуінің де емтиханды тапсырмауының ықтималдығы 0,1 санына тең болса, онда

а) кем дегенде бір студенттің емтихан тапсыруының;

b) дәл бір студенттің емтихан тапсыруының ықтималдықтарын табыңыз.